TSE WP working paper series

12-312

Research Group: Public Economics

May, 2012

"Une Analyse de la Loi Electorale du 29 Juin 1820"

Michel Le Breton and Dominique Lepelley

Toulouse School of Economics (TSE) - Manufacture des Tabacs
Aile Jean-Jacques Laffont - 21, allée de Brienne - 31015 TOULOUSE Cedex 6
Tél : +33 (0) 5 61 12 85 89 - Fax : +33 (0) 5 61 12 86 37 - **www.tse-fr.eu** - contact@tse-fr.eu

Toulouse School of Economics

Une Analyse de la Loi Electorale du 29 Juin 1820*

Michel Le Breton† Dominique Lepelley‡

Mai 2012

Abstract

Nous exploitons dans cet article la théorie des indices de pouvoir pour évaluer les influences respectives des deux classes d'électeurs dans le mode de scrutin instauré par la loi électorale du 29 juin 1820, dite loi du "double vote". Nous montrons, à l'aide d'un modèle simplifié, que le pouvoir de vote des "grands" électeurs, qui votent deux fois, est au moins trois à quatre fois supérieur à celui des "petits" électeurs, qui ne votent qu'une fois. Le modèle proposé constitue à certains égards une extension de celui qu'Edelman (2004) a récemment utilisé pour étudier les situations dans lesquelles certains électeurs appartiennent à plus d'un collège électoral.

Classification JEL : D71, D72.

Mots clés : Elections, Vote, Pouvoir de vote.

*Les auteurs remercient particulièrement Philippe Mongin, dont la lecture attentive et les remarques ont permis d'améliorer significativement la présentation des idées et résultats de cet article.Les auteurs remercient également deux arbitres de lecture de leurs rapports approfondis, P. Edelman d'avoir communiqué certains de ses travaux sur des questions voisines ainsi que les participants à la conférence de l'ADRES de leurs commentaires et suggestions. Ils remercient enfin L. Vidu d'avoir conduit des simulations portant sur l'évaluation du pouvoir où la corrélation des votes des électeurs votant deux fois est prise en compte. Elles sont consignées dans Vidu (2011).

†GREMAQ et IDEI, Université de Toulouse 1, France.

‡CEMOI, Université de La Réunion, France

1 Introduction

1.1 Préambule

L'objet de cet article est de revisiter un épisode intéressant de l'histoire électorale française à la lumière des outils modernes de la mesure du pouvoir. La théorie des choix collectifs nous enseigne qu'il n'existe aucune méthode de vote qui puisse être considérée comme universellement supérieure aux autres, chaque méthode présentant des avantages et des inconvénients que les chercheurs de ce domaine ont d'ailleurs soigneusement répertoriés. Le choix définitif d'une méthode plutôt qu'une autre est en quelque sorte affaire de goût. La principale vertu du travail des théoriciens est d'avoir formulé le problème du choix entre les méthodes en concurrence comme un problème de choix entre les propriétés que l'on souhaiterait voir vérifier par la méthode ultimement retenue. Nous n'allons pas passer ici en revue l'ensemble de ces propriétés. Parmi celles qui reviennent systématiquement figure la propriété de traitement symétrique des agents participant à la procédure de choix collectif (les électeurs), encore appelée propriété d'anonymat, car en principe aucune caractéristique personnelle de l'agent n'est supposée jouer un quelconque rôle dans le fonctionnement de la procédure. De ce point de vue toute violation du suffrage universel en matière électorale constitue une violation de la propriété d'anonymat. Par exemple, des caractéristiques personnelles comme le sexe ou encore le montant d'impôts payés (dans le cas du suffrage censitaire) peuvent intervenir pour exclure certaines personnes du droit de vote. Dans ce type de situations, la violation de la symétrie est extrême : on est électeur à part entière ou pas du tout. Dans certains environnements électoraux, comme ceux décrivant des modes d'élections à plusieurs degrés (élections présidentielles aux USA,...) ou encore ceux correspondant au mode de décision de certaines assemblées et grandes organisations internationales (Conseil des ministres de la Commission Européenne, ONU,...), les asymétries éventuelles sont plus cachées et plus nuancées. Même si, en apparence, les électeurs ou représentants sont tous dotés d'un même pouvoir de vote, c'est-à-dire d'une capacité à influencer le résultat d'un vote, force est de reconnaître que la réalité de cette influence varie parfois fortement d'un acteur à l'autre. Il y a là, aussi, violation de la propriété de symétrie. Elle est moins tranchée que dans le cas d'une exclusion totale[1] mais elle est bien présente et la question se pose d'évaluer quantitativement le pouvoir réel alloué aux uns et aux autres par la procédure. La théorie de la mesure du pouvoir dont les indices les plus célèbres sont dus respectivement à Banzhaf (1965)(1966)(1968) et à Shapley-Shubik (1954) est précisement consacrée à cette question[2]. Cette théorie a

[1] Un acteur dépourvu d'influence est appelé "dummy" en anglais.

[2] On trouvera des exposés de ces questions dans Felsenthal et Machover (1998) et Owen (2001).

été appliquée avec succès à l'analyse de la répartition du pouvoir de vote dans des contextes différents comme par exemple le collège électoral américain (quel est le pouvoir d'un électeur californien comparé à celui d'un électeur de l'Ohio ?) ou la Communauté Européenne (dans le système retenu par le traité de Nice et les versions ultérieures, quel est le pouvoir du représentant de la Pologne comparé à celui du représentant du Portugal ?). Nous nous proposons d'appliquer ces outils à l'étude d'une loi électorale qui fut utilisée au dix-neuvième siècle en France durant une décennie et qui, du point de vue de la théorie du vote, présente l'intéressante particularité de distinguer deux catégories d'électeurs, dont l'une a la possibilté de voter deux fois. L'objet principal de notre analyse est de comparer le pouvoir de vote de chaque catégorie d'électeurs dans le cadre de cette loi. La loi dont il s'agit est la loi du 29 juin 1820 portant sur le mode d'élection des députés de la "chambre des départements" et qui introduisit d'importants changements par rapport à la loi du 5 février 1817, dite aussi loi Laîné. Sans procéder ici à une analyse complète du contexte historique de ce changement, nous allons cependant, dans une étape préliminaire, en rappeler les principaux éléments[3].

1.2 Genèse et Contexte Historique de la Loi du 29 Juin 1820

La loi électorale a connu plusieurs changements notoires durant la période de la Restauration[4] qui commence avec la Charte Constitutionnelle du 4 juin 1814. Il est important de rappeler que la Charte Constitutionnelle ne fixe pas le détail des élections. Comme le note Rémond (1965) : "La Charte, faute de temps et par prudence politique, s'est abstenue de fixer les modalités pratiques des élections. Elle s'est bornée à quelques dispositions permanentes qui tiennent en quelques articles... Elle concourt, ce faisant, à consacrer en France la tradition qui refuse tout caractère constitutionnel aux régimes électoraux : si le principe électif participe de la nature quasi-sacrée du pacte fondamental, les modalités de son application relèvent des lois ordinaires[5]. Elles sont donc à la merci des renversements de majorité : l'histoire des régimes électoraux présente de ce fait une instabilité dont la restauration donne le premier exemple..." p 308. Ou encore : "De même que sous la révolution, l'assemblée primaire était l'unité constitutive, le collège électoral est sous la restauration la cellule de base... Outre les

[3]Voir Campbell (1958) et Challeton (1891).

[4]Sur la Restauration, on pourra consulter de Bertier de Sauvigny (1993) et de Waresquiel et Yvert (2002).

[5]Comme l'observe fort à propos Gaudilleres (1995), la première apparition du scrutin uninominal date de la période des "Cent-Jours". En effet, l'acte additionel aux constitutions de l'Empire d'Avril 1815 est le premier texte à utiliser celui-ci. Les électeurs de chaque arrondissement élisent un membre de la chambre des représentants sans qu'il soit nécessaire de découper le territoire puisque la loi fait référence aux arrondissements administratifs. Certes ces députés d'arrondissement ne constituent qu'une partie de l'assemblée (368 membres sur 629); se joignent à eux les députés de département désignés au scrutin plurinominal. La législation de Juillet 1815 ne retient rien du scrutin uninominal mais la loi de Juin 1820 lui réservera une place à nouveau une place dans le processus électoral.

conditions pour être électeur, la Charte fixe la répartition des sièges entre les départements, qui demeurera inchangée, et stipule que la chambre sera renouvelée par cinquième... Tout le reste est laissée à l'initiative législative : elle ne se privera pas d'en user." p 309. Par exemple, s'agissant des ordonnances de 1815 et 1816 et des élections de l'été 1815, il note que[6] : "L'élection a lieu à deux degrés les 14 et 21 août 1815. Le rôle des collèges d'arrondissement se borne à dresser une liste des candidats, selon une répartition des tâches qui rappellent le système de l'empire. Sur ces listes les collèges de département sont tenus de prendre la moitié au moins des députés : pour l'autre moitié, leur liberté de choix est entière." p 310.

La Restauration conserve le suffrage censitaire, usuel depuis la convocation des Etats Généraux de 1789[7]. La loi du 5 février 1817 (dite loi Laîné) introduit pour la première fois en France l'élection directe. Il n'y a dans chaque département qu'un seul collège électoral divisé en sections dans les départements où il y a plus de 600 électeurs. Chaque section concourt directement à la nomination de tous les députés que le collège doit élire. Les électeurs votent par bulletins de listes, celles-ci contenant à chaque tour de scrutin autant de noms qu'il y a de nominations à faire. Il y a trois tours de scrutin. Après les deux premiers, le bureau dresse une liste des personnes qui, au deuxième tour, ont obtenu le plus de suffrages. Cette liste contient deux fois autant de noms qu'il y a encore de députés à élire. L'élection se fait alors à la majorité relative. Comme le note Rémond : "La loi Laîné supprime la hiérarchie des collèges par le canal desquels le choix des représentants s'était jusqu'à présent presque toujours opéré... elle adopte le collège unique dont font partie tous ceux qui satisfont aux conditions requises. Il n'y a donc plus qu'une seule catégorie d'électeurs, qui se réunissent au chef lieu de département." p 313.[8] Les élections qui suivirent consacrèrent la montée des libéraux au détriment des ultraroyalistes. Ceux-ci s'employaient pas divers moyens à tout mettre en œuvre pour modifier la loi à leur profit.

[6]La chambre introuvable, selon une expression célèbre de Louis XVIII, est issue de ces élections.

[7]Le mode de calcul du cens révèle la conception familialiste du suffrage (Verjus (1996, 2000, 2002).

[8]Rosanvallon (1992, p 273) offre une analyse très poussée de la Loi Laîné dont le projet, rédigé par Guizot, développe deux principes fondamentaux. Le premier est que l'élection doit être directe, c'est-à-dire que tous les citoyens qui, dans un département, remplissent les conditions exigées par la charte pour être électeur, doivent concourir directement, et par eux-mêmes, à la nomination des députés du département. Le second, c'est que la nomination de chaque député doit être le résultat du concours de tous les électeurs du département, et non l'ouvrage de telle ou telle portion déterminée par ces mêmes électeurs. Rosanvallon propose une étude détaillée de la perception du vote à deux degrés par les libéraux et de la philosophie du vote direct. Il présente également une analyse très pertinente de la rhétorique des ultras au service d'une coalition des extrêmes composée de l'aristocratie et du petit peuple qui dans le cas du suffrage indirect continue d'exercer une influence sur le choix des représentants. Nous renvoyons a son chapitre "L'Ordre Capacitaire", qui contient un examen minutieux des débats et enjeux politiques qui ont accompagné le choix et les changements de régimes électoraux. La documentation sur laquelle il s'appuie comprend entre autres choses de nombreux extraits de débats parlementaires ainsi que des articles d'époque, comme ceux publiés dans *Le Conservateur* ou le *Mercure de France*.

Dès février 1819, sous l'impulsion notamment de l'ancien directeur Barthélémy, une proposition introduite à la chambre des Pairs tend à modifier le cens et à réintroduire le suffrage indirect. Au nombre des arguments mis en avant pour dénoncer la loi de 1817, figurait l'importance du taux d'abstention, évalué globalement à un tiers. "Dans le département du Nord, disait M. Lainé le 20 mars 1819 à la chambre des députés, le plus riche et le plus peuplé de France, le nombre des électeurs inscrits ne s'est élevé qu'à 2103. Dans ce même département, il y a eu deux élections depuis la loi du 5 février. En 1817, sur 2303 électeurs, il ne s'en est rendu au collège que 439, et en 1818 que 994. Dans les Landes, sur 674 électeurs inscrits, le collège n'a reçu que 336 votants. Dans les Basses-Pyrénées où il y a 321 électeurs, 83 seulement ont paru"[9]. La proposition Barthélémy fut rejetée mais le projet d'amender la loi électorale n'était pas abandonné pour autant. L'élection de l'abbé Grégoire en 1819 et l'assassinat du duc de Berry en février 1820 sont deux événements symboliques qui contribuèrent au succés de la campagne des ultras

Pour bien comprendre la genèse de la loi électorale de 1820, il est utile de rappeler quelques repères chronologiques[10]. Dans un travail très fouillé, Berger (1903) décrit comment les victoires de la gauche aux différentes élections de renouvellement partiel de la chambre ont conduit la droite à tout mettre en œuvre pour stopper ce processus[11]. Comme nous venons de le signaler, l'opposition royaliste invoqua les taux d'abstention élevés et la fraude.

Le ministre de la justice, de Serres s'était mis à préparer avec le concours du duc de Broglie un grand projet de réforme constitutionnelle. Dans ce projet qui était un complément à la charte, l'organisation de la chambre des députés tenait une grande place. Le grand défaut de la loi de 1817 était, selon lui, d'être purement démocratique. Le but de son projet était donc d'introduire dans la loi cet élément aristocratique qui était absent Pour cela il établissait dans chaque département des collèges électoraux d'arrondissement et des collèges supérieurs. Chaque collège d'arrondissement qui se composait de tous les Francais agés de 30 ans et payant 200 francs de contributions directes élisaient un député. Les collèges supérieurs qui comprenaient les électeurs agés de 30 ans et payant 400 francs d'impôts directs nommaient de leur côté un certain nombre de représentants: les membres des collèges de département votaient aussi dans les collèges de'arrondissement. C'était bien distinguer entre les électeurs et faire une place plus grande aux plus forts censitaires. Le nombre des députés était en

[9]Cité par Weil (1895).

[10]Notons que les deux événements symboliques que furent l'élection de l'abbé Grégoire en 1819 et l'assassinat du duc de Berry en février 1820 contribuèrent, à n'en point douter, au succés de la campagne des ultras.

[11]Les arguments présentés ci-dessous sont empruntés à Berger mais on pourra aussi consulter Newman (1974), Spitzer (1983) et Skuy (2003).

outre porté à 440. Les conditions d'éligibilité étaient rendues plus faciles. Enfin les députés étaient élus pour 7 ans et le renouvellement était intégral.

Mais l'accord impicite provoqué par les défautes électorales ne dura pas car certains membres du ministère espéraient qu'un prochain renouvellement lui laisserait sa majorité. Certains ministres se refusérent à modifier la loi. Suite à leur démission, le ministère Decazes voit le jour. Le désir de changer la loi électorale n'est cependant nullement amoindri: la session de la chambre s'ouvrit en novembre 1819 par un discours du roi manisfestant son intention de modifier la loi électorale. Le projet de Serres avait cependant peu de chances de réussir en raison de l'opposition de la droite (contre le ministère) et de la gauche même modérée (contre le double vote). Decazes était le maitre d'oeuvre de ce nouveau projet. Son intention était de substituer au projet de Serres un projet plus simple sur lequel un accord pût se faire.. Comme le note Weil (1895) : "Dans l'exposé des motifs, M. Decazes signalait les vices de la législation existante : un scrutin de liste pouvant porter sur un nombre de députés pouvant aller jusqu'à 12 et le vote au chef-lieu." p 90. En effet, la loi Laîné prévoyait que les collèges électoraux devaient se réunir physiquement au chef-lieu de chaque département. Decazes décrivait le déclin des motivations "des propriétaires enlevés à leur sol, contraints de faire porter leurs choix sur des noms qui sont nouveaux pour eux et ne peuvent pas exprimer un vote personnel, un suffrage réel. Ils arrivent à se désintéresser de l'élection. Une conséquence inévitable de cet état de choses est d'assurer au chef-lieu toute l'influence électorale. Les trois cinquièmes des arrondissements n'ont pas élu de députés". Le projet Decazes maintint le système des deux collèges du projet de Serres mais proposa qu'au lieu de nommer séparément leurs députés, ceux-ci les choisissent parmi les candidats qu'ils se seraient mutuellement présentés. Au terme de pourparlers infructueux, le roi ordonna de rédiger un nouveau projet. Le 10 février 1820 celui-ci était rédigé et approuvé par le roi. Ce projet conservait deux collèges. Les collèges d'arrondissement devaient nommer 258 députés. Les collèges supérieurs étaient composés de 600 membres au plus et de 100 membres au moins, élus par les collèges d'arrondissement parmi les électeurs payant 1000 F de contributions directes et ils devaient élire 172 députés. On espérait qu'une entente allait pouvoir être obtenue sur cette base. Le projet devait être présenté à la Chambre le 14 février mais le 13, le Duc de Berry etait assassiné ! La situation du ministère devenait très difficile (la droite ultra considèrait l'orientation du cabinet pendant ces dernières années comme un encouragement aux pires idées révolutionnaires) et finalement Decazes quitte le pouvoir et laisse la place à Richelieu. Le Ministre de l'intérieur M. Siméon présenta dès avril un nouveau projet reprenant l'idée de deux classes de collèges électoraux. On avait mis le plus grand soin à ne pas s'écarter des dispositions de la charte. Aucune modification n'est apportée quant aux conditions d'électorat, d'éligibilité ni quant au nombre de députés. Il n'était pas question non plus du mode de renouvellemnt de la chambre. Le projet mainenant le système des deux collèges. Il innovait quant à leurs compositions et à leurs attributions. Le projet de loi fut débattu avec ardeur à la Chambre des députés et aboutit à des émeutes dans Paris.

Dans le premier projet[12] présenté à la Chambre, les collèges de département devaient se composer des électeurs les plus imposés du département jusqu'à concurrence du cinquième de la totalité de ces électeurs. Les collèges d'arrondissement ne nommaient plus de députés, mais choisissaient chacun un nombre de candidats égal au nombre des députés du département, et c'est parmi ces candidats que les collèges supérieurs devaient élire les députés. Le projet souleva les protestations de la gauche. La discussion de la loi commenca le 15 mai et devait durer jusqu'au 10 juin. Dans la Chambre, deux partis se trouvaient en présence : d'un côté les défenseurs de la loi du 5 février, de l'autre ses adversaires... Les deux partis en présence étaient à peu près égaux et on en eut bientôt la preuve. Après la clôture de la discussion sur le premier article du projet, deux amendements furent présentés par Delaunay et par Jordan, membres l'un et l'autre du centre gauche. Le rejet des amendements imposa la conciliation et le 6 juin, un amendement de nature à établir un compromis est introduit par Courvoisier. C'est déjà la loi de 1820, à ceci près que, pour lui, les plus fortement imposés ne devaient voter que dans les collèges supérieurs. Devant l'opposition de la droite, il retire sa motion et Boin introduit le double vote dans un amendement présenté le 7 juin et voté le 9 juin. L'ensemble de la loi est enfin voté par la Chambre des Députés le 12 juin et par la Chambre Haute le 28 juin.

Au nombre des dispositions principales de la loi qui fut définitivement adoptée, il figure un découpage en deux catégories de collèges, découpage qui avait pourtant fait l'objet de discussions animées. Il y a dans chaque département un collège électoral de département et des collèges électoraux d'arrondissement. Comme dans la loi du 5 février 1817, sont électeurs dans les collèges d'arrondissement, les citoyens de sexe masculin âgés d'au moins 30 ans et payant au moins 300F de contributions directes. Les collèges d'arrondissement élisent les $\frac{3}{5}$ des députés, soit 258. Les collèges de département, composés du premier quartile des électeurs les plus imposés du département, procèdent à l'élection des $\frac{2}{5}$ restants, soit 172 députés. La méthode d'élection est le scrutin uninominal (plurinominal dans le cas des collèges de département élisant plus d'un député) majoritaire à 3 tours déjà proposé par la

[12]Tous les projets (à l'exception de celui amendé par Jordan) ont en commun de proposer deux collèges qui définissent deux classes d'électeurs (sans compter ceux qui, à défaut de ne pas passer le seuil censitaire, ne participent pas au processus politique). Seuls les conditions d'accès aux deux collèges et les attributions de ceux-ci varient d'un projet à l'autre.

loi du 5 février 1817[13].

Sans surprise, les élections de novembre 1820 virent une victoire écrasante des ultra-royalistes surnommée la "chambre retrouvée" en référence à la chambre de 1815 connue sous le nom de "chambre introuvable". La loi a été utilisée à plusieurs reprises à l'occasion des renouvellements de la chambre et aussi de plusieurs dissolutions. Après la dissolution de 1823, les élections de février-mars 1824 conduisent à une domination sans partage des ultras : les libéraux n'ont plus que 19 sièges. Celles de novembre 1827 voient la remontée des libéraux, qui ne cessera de se confirmer jusqu'aux élections de juillet 1830. On connaît la suite : l'attitude intransigeante du roi Charles X, les Ordonnances de Juillet, les Trois Glorieuses et le début de la Monarchie de Juillet. Une loi électorale du 19 avril 1831 remplace celle du 29 juin 1820, et elle abandonne le collège électoral de département tout en abaissant le cens et l'âge pour être électeurs. Le pays est en marche vers le suffrage universel.

Cet article porte exclusivement sur la loi électorale du 29 Juin 1820 mais il est utile de rappeler que cette période a été le théatre d'autres pratiques électorales au premier rang desquelles l'"art" du découpage d'un territoire en circonscriptions. En fait, la nécessité d'un découpage découle de la loi du 29 Juin 1820. En effet, en 1820, la France est divisée en 247 circonscriptions. La loi du 29 Juin 1820 ayant créé 247 collèges d'arrondissement alors que la France comptait 362 arrondissements administratifs, un découpage s'en suivait nécessairement. Comme le souligne Gaudillere (1995), " le parlement aurait certes pu en débattre en même temps que la loi électorale elle même: cette procédure logique sera celle de 1831, 1875, 1889 et 1927. Mais deux évènements conduisent le pouvoir exécutif à choisir une autre voie. Comme nous l'avons déjà évoqué, les débats parlementaires sur la loi du double vote s'étaient caractérisés par une rare violence et une obstruction farouche des libéraux; sur ce problème, ils avaient démontré la fragilité et l'exiguité de la majorité ministérielle. On comprend que le gouvernement ait préféré ne pas s'engager dans un interminable débat de découpage. d'autre part, l'opération n'avait jamais été tentée , nin en France ni alleurs, ce qui incitait à réfléchir avant toute initiative. Autant le vote de la loi électorale avait été brusqué, autant le découpage devait ête "médité".

A ces deux raisons conjoncturelles s'ajoutaient deux raisons de fond que l'on retrouvera: le cabinet Richelieu menait une politique de réaction par rapport à ses prédécesseurs. Comme

[13] Nous n'allons pas exposer tous les détails de la loi de 1820. Il faut cependant savoir qu'il y a des cas spéciaux où la division en deux catégories de collèges n'est pas mise en œuvre. L'article 1 de la loi mentionne que "...néanmoins, tous les électeurs se réuniront dans un seul collège dans les départements qui n'avaient à l'époque du 5 février 1817 qu'un seul député à nommer, dans ceux où le nombre d'électeurs n'excède pas 300 et dans ceux qui, divisés en 5 arrondissements de sous-préfecture n'auront pas au delà de 400 électeurs". Par ailleurs certains historiens, comme de Waresquiel et Yvert (2002), ont mal reproduit les proportions attachées aux deux collèges électoraux.

souvent, la loi électorale n'était qu'une arme destinée à établir solidement et durablement la majorité de la chambre, en l'espèce à droite. Le découpage revêtait dans cette optique une importance bien compréhensible, et le fixer sans débat parlementaire dans le silence des bureaux ministériels, était une tentation toute naturelle. La loi du 29 Juin article 2 avait donc renvoyé le découpage à une ordonnance royale, prise après avis des conseils généraux et soumise à l'approbabtion du parlement l'année suivante. La consultation des assemblées départementales fut rapidement conduite et l'ordonnance signée signée le 30 août 1820. Le travail monumental de Gaudillere démontre que de nombreux découpages ont procédé d'un calcul stratégique

Le projet de loi destiné à pérenniser le provisoire fut déposé le 5 Janvier 1821, vint en discussion le 7 Février devant les députés et déboucha sur la loi du 26 Mai 1821. Mais la loi électorale et le double vote avaient entre-temps produit les effets escomptés, et radicalement changé l'hémicycle : sur 223 sièges pourvus aux élections de novembre 1820, la majorité gouvernementale en avait remporté environ 200. Comme le note Gaudillere: "Ces débats parlementaires de 1821 sont intéressants à un double titre. Certes, ils n'ont que très peu modifié le découpage de 1820: 15 départements à peine, souvent pour de simples retouches. Mais ils ont contraint le gouvernement et sa majorité à tenter d'expliquer les méthodes utilisées six mois auparavant. Ils ont aussi fixés pour une très longue période-jusqu'à la fin de la Troisième République-certains traits des débats parlementaires en matière de découpage: large consultation des députations de chaque département, nombre somme toute restreint d'amendements au projet gouvernemental, rôle de la chambre haute". S'agissant des principes de ces découpages, Le ministre de l'intérieur les énumère dans son exposé des motifs: "la population générale des arrondissements, leur richesse, leur influence, la facilité des communications, le rapprochement des électeurs d'un centre commun, enfin leur nombre qu'il était bon de rendre à peu près égal, autant que les localités le permettaient"[14].

1.3 Objet et Plan de l'Etude

La loi électorale du 29 juin 1820, en distinguant deux catégories d'électeurs, ceux qui ne votent que dans le collège d'arrondissement et ceux qui votent dans le collège d'arrondissement et le collège de département, présente une caractéristique tout à fait originale qui en fait un "cas d'école" pour l'analyse du pouvoir de vote. Comme le souligne Rémond (1965), "la minorité fortunée est ainsi deux fois représentée. La loi accentue et *porte au carré* le caractère foncièrement inégalitaire de l'élection censitaire".

[14] Le lecteur lira avec profit le détail de l'argumentaire dans Gaudillere (1995).

Comment peut-on mesurer le degré d'influence de chaque catégorie d'électeurs dans un tel processus électoral ? Les électeurs les plus riches, qui votent deux fois, ont-ils deux fois plus de "pouvoir" que ceux qui ne votent qu'une fois ? L'analyse que nous proposons dans les sections qui suivent s'efforce de répondre à ces questions.

On notera que le champ de cette étude dépasse le cadre étroit de la loi de 1820 : le double vote peut en effet intervenir également dans le cas de systèmes électoraux hybrides. Dans ces systèmes (utilisés notamment dans les Conseils de certaines structures intercommunales aux Etats-Unis), le territoire est découpé en districts et les électeurs de chaque district élisent un représentant qui siègera au Conseil ; à ces représentants élus par district s'ajoutent des représentants élus sur une base globale par la population de l'ensemble du territoire. Des systèmes de ce type ont été récemment étudiés par Edelman (2004). Nous y reviendrons.

L'article est structuré de la manière suivante. La Section 2 présente les fondements théoriques de notre analyse. Nous introduisons tout d'abord, de manière brève, dans la Section 2.1. la théorie des indices de pouvoir, dont nous soulignons la nature fondamentalement probabiliste. Nous rappelons ensuite dans la Section 2.2 certains résultats utiles pour comprendre les développements ultérieurs ; ces résultats, dus notamment à Owen (2001), concernent l'analyse du pouvoir des électeurs dans les système représentatifs les plus courants, où les différents collèges électoraux sont disjoints (chaque électeur ne vote qu'une fois). La Section 2.3 présente enfin l'analyse d'Edelman (2004), qui, le premier, a étudié la situation plus générale où les différents districts électoraux ne sont pas disjoints. A la lumière de ces analyses, nous proposons dans la Section 3 un modèle simplifié et approximatif permettant d'évaluer le rapport des pouvoirs de chaque catégorie d'électeurs dans le cadre de la loi de 1820. Le modèle présenté repose (notamment) sur une hypothèse discutable, selon laquelle les votes des électeurs qui votent deux fois sont indépendants. Afin d'évaluer l'impact des hypothèses simplificatrices utilisées, nous présentons dans la même section des calculs numériques permettant de qualifier certaines approximations tout en ignorant la corrélation des votes des électeurs qui votent dans deux collèges. Des calculs exacts intégrant la corrélation des votes reproduits dans les Appendices 3, 4 et 5 complètent l'analyse, que conclut la Section 4.

2 Fondements Théoriques

2.1 Choix Social Binaire

On considère le cas d'une collectivité N constituée de n membres, devant faire un choix parmi deux options : D ou G, réforme ou statu quo,... Chaque membre i de N est décrit par sa préférence P_i. Il y a deux préférences possibles : G ou D. Un mécanisme de choix social (interprété ici comme un mécanisme de vote) est une application F définie sur $\{G, D\}^n$ et à valeurs dans $\{G, D\}$: à tout profil $P = (P_1, ..., P_n) \in \{G, D\}^n$, il attache une décision $F(P) \in \{G, D\}$. Un tel mécanisme F est complètement décrit par la liste $F^{-1}(G)$ des coalitions $S \subseteq N$ telles que $F(P) = G$. Cette liste $\mathcal{W}$ de coalitions définit ce qui est communément appelé un *jeu simple* dès l'instant où $\varnothing \notin \mathcal{W}$ et $N \in \mathcal{W}$[15] et $\mathcal{W}$ est monotone ($S \in \mathcal{W}$ et $S \subseteq T \Rightarrow T \in \mathcal{W}$) ; une coalition S dans $\mathcal{W}$ sera appelée ici une coalition gagnante. Un jeu simple est dit *propre* si $S, T \in \mathcal{W} \Rightarrow \mathcal{S} \cap \mathcal{T} \neq \varnothing$. Il est *fort* si pour tout $S \subseteq N : S \in \mathcal{W}$ ou $N \backslash S \in \mathcal{W}$[16].

Intuitivement, un électeur a du pouvoir dans le mécanisme F (i.e. $\mathcal{W}$) lorsque sa préférence P_i joue un rôle important dans la sélection de l'option collective. Peut-on évaluer *ex ante* (c'est-à-dire avant la connaissance des préférences des uns et des autres) le pouvoir des différents électeurs ?

Une telle mesure repose tout d'abord sur un modèle de tirage aléatoire π du profil P. Plaçons nous du point de vue de l'électeur i. Si ce qui importe est d'être celui dont la préférence fait la différence, alors il faut évaluer le nombre de profils P ou, de façon équivalente de $S = S(P)$, tels que $S \in \mathcal{W}$ et $S \backslash \{i\} \notin \mathcal{W}$. La probabilité d'un tel événement est:

$$\sum_{T \notin \mathcal{W} \text{ et } T \cup \{i\} \in \mathcal{W}} \pi(T)$$

La mesure est clairement sensible à la spécification de π. Deux cas majeurs ont retenu l'attention. Le premier (connu dans la littérature anglosaxonne sous le vocable de *Impartial Culture (IC))* conduit à l'indice de Banzhaf. Il correspond à la situation où les P_i résultent de tirages indépendants et équiprobables. Dans ce cas, $\pi(T) = \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $T \subseteq N \backslash \{i\}$. L'indice de pouvoir de Banzhaf B_i de l'électeur i est donc égal à:

$$\frac{\eta_i(\mathcal{W})}{2^{n-1}}$$

15 Le mécanisme n'est pas constant.

16 Le mécanisme F traite équitablement les deux alternatives D et G si et seulement si le jeu $\mathcal{W}$ est propre et fort. En effet soit P un profil tel que $F(P) = G$. Par conséquent, si S représente la coalition des joueurs votant G alors $S \in \mathcal{W}$. Considérons le profil P' où les électeurs de S votent maintenant D et ceux de $N \backslash S$ votent G. Puisque $S \in \mathcal{W}$, $N \backslash S \notin \mathcal{W}$ c'est-à-dire : $F(P') = D$. On vérifie réciproquement que si F est neutre alors $\mathcal{W}$ est propre et fort.

où $\eta_i(\mathcal{W})$ désigne le nombre de coalitions $T \subseteq N \setminus \{i\}$ telles que $T \notin \mathcal{W}$ et $T \cup \{i\} \in \mathcal{W}$ (dans la littérature, une telle coalition T est souvent appelée un "swing" pour le joueur i). Le second (connu sous le vocable de *Impartial Anonymous Culture (IAC) Assumption)* conduit à l'indice de Shapley-Shubik. Il suppose que, conditionnellement au tirage uniforme du paramètre p dans l'intervalle $[0,1]$, les tirages des préférences individuelles sont indépendants et identiquement distribués comme des Bernoulli de paramètre p. On obtient dans ce cas: $\pi(T) = p^t(1-p)^{n-1-t}$ où $t \equiv \#T$. L'indice de pouvoir de Shapley-Shubik Sh_i de l'électeur i est donc égal à:

$$\int_0^1 \left(\sum_{T \notin \mathcal{W} \text{ et } T \cup \{i\} \in \mathcal{W}} p^t(1-p)^{n-1-t} \right) dp$$

On pourrait songer à bien d'autre modèles probabilistes incluant plus ou moins de corrélation entre les votes. On pourrait par exemple supposer que les électeurs sont décrits au départ par des caractéristiques socioéconomiques et géographiques et que deux électeurs ayant des caractéristiques voisines ont plus de chances de voter de façon similaire. S'agissant de l'influence, on pourrait aussi s'intéresser à d'autres événements que celui d'être électeur pivot. On pourrait, par exemple, considérer l'événement "concordance entre le choix social et la préférence de l'électeur i ": le pouvoir de l'électeur i serait mesurée dans ce cas par la probabilité de voir le mécanisme respecter son choix. Cette mesure n'est pas sans relation avec la mesure d'influence considérée ici[17]. Dans la suite de notre travail, nous allons nous limiter à la mesure du pouvoir d'influence attachée au fait d'être pivot et aux deux modèles probabilistes évoqués ci-dessus[18].[19].

Le calcul de ces indices va dépendre en premier lieu du jeu simple décrivant le mécanisme. Dans ce qui suit, nous nous concentrerons principalement sur les jeux majoritaires pondérés (en particulier les jeux majoritaires ordinaires) et les jeux composés. Un jeu simple $(N, \mathcal{W})$ est un jeu majoritaire pondéré si il existe un vecteur de poids $(w_1, w_2, ..., w_n) \in \mathbb{R}_+^{\ltimes}$ et un quota $q > 0$ tels que :

$$S \in \mathcal{W} \text{ ssi } \sum_{i \in S} w_i \geq q$$

Le nombre q désigne le quota nécessaire pour valider l'alternative qui est examinée. Suivant le contexte, les poids w_i pourront désigner le nombre de représentants de i si i

[17]Dans le cas IC, voir Felsenthal et Machover (1998) theorème 3.2.16.

[18]Ce sont les deux modèles les plus populaires. Pour une présentation plus générale de ces deux modèles et des indices qui y sont associés, voir par exemple Felsenthal et Machover (1998) et Straffin (1988).

[19]Dans les appendices 1 et 2, nous introduirons cependant deux modèles complémentaires, adaptés à notre contexte électoral et qui s'intercalent entre IC et IAC ; cela nous permettra d'éviter quelques-unes des difficultés du modèle IAC conventionnel dans le cas des jeux composés.

désigne un pays votant dans une organisation internationale ou encore le nombre de députés de i si i désigne un parti votant de façon disciplinée dans une assemblée parlementaire. Si $q > \frac{\sum_{i \in N} w_i}{2}$, le jeu $\mathcal{W}$ est propre. Lorsque les poids w_i sont des entiers, le quota $\left\lceil \frac{\sum_{i \in N} w_i}{2} \right\rceil$ où $\lceil x \rceil$ désigne le premier entier strictement supérieur à x désigne le quota majoritaire et le jeu simple associé est appelé le jeu majoritaire ordinaire. Si $\sum_{i \in N} w_i$ est impair, le jeu majoritaire ordinaire $\mathcal{W}$ est fort. Lorsque $\sum_{i \in N} w_i$ est pair, ce n'est plus nécessairement le cas. Lorsqu'une telle situation se présente[20], un second jeu est utilisé pour départager les ex aequo, par exemple, l'un des joueurs peut être utilisé comme "tie breaker". Dans le cas où tous les poids sont égaux à 1 et $q = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, on obtient le jeu majoritaire symétrique. Si n est impair, le jeu majoritaire symétrique est fort.

2.2 Composition Classique : les Collèges Disjoints

La complexité du problème historique examiné ici trouve son origine dans le fait que les différents collèges qui élisent un ou plusieurs représentants ne sont pas disjoints. Certains électeurs appartiennent à plusieurs collèges et votent donc plusieurs fois. Le cas d'école le plus souvent considéré suppose en revanche des représentants élus sur la base d'un découpage électoral de la population. La population totale des électeurs N est partitionnée en K districts électoraux: $N = \cup_{1 \leq k \leq K} N_k$. Les n_k électeurs du district k élisent à la majorité simple w_k représentants (les w_k représentants du district k sont tous de droite ou tous de gauche). L'assemblée comprend donc au total $\sum_{1 \leq k \leq K} w_k$ représentants. Nous allons déterminer des formules permettant un calcul exact ou approximatif des indices de Banzhaf et de Shapley-Shubik des électeurs suivant le district auquel ils appartiennent dans le cadre du jeu composé qui décrit le processus de décision collective. Ce calcul exploite les propriétés des deux indices par rapport à l'opération de composition. Dans le cas de Banzhaf, l'indice de pouvoir résulte d'une simple multiplication de l'indice de pouvoir de l'électeur dans son district et de l'indice de pouvoir de son représentant dans l'assemblée. Dans le cas de Shapley-Shubik, les choses sont beaucoup moins simples comme nous le rappelle Owen (2001) et nous y revenons ci-dessous.

Comme on l'a vu dans la section précédente, le calcul de la probabilité de l'événement "l'électeur i du district k est pivot" est assez simple dans son principe : il suffit de dénombrer les profils de vote où cet électeur est pivot. Ce sera le cas si les votes dans le district k se divisent en deux parts égales **et** si le bloc des w_k représentants du district k est pivot dans

[20] C'est par exemple la cas du collège électoral américain de 2008 avec $n = 51$ et des poids w_i tels que $\sum_{i \in N} w_i = 538$ et donc $\left\lceil \frac{\sum_{i \in N} w_i}{2} \right\rceil = 270$. En cas d'égalité (269 votes pour chacun des deux candidats) c'est la chambre des représentants (qui comprend 435 membres) qui élit le président.

l'assemblée. Dans le cas de IC, ce dernier événement est indépendant de ce qui s'est passé dans le district k. Il n'en est pas de même sous l'hypothèse IAC. C'est la raison qui justifie l'introduction du modèle IAC* décrit dans l'Appendice 1.

Le bloc des w_k représentants du district k est pivot dans l'assemblée si l'ensemble des districts $G \subseteq \{1, ..., K\} \setminus \{k\}$ qui votent à gauche est tel que:

$$q - w_k \leq \sum_{j \in G} w_j < q$$

Le dénombrement M_k des ensembles G vérifiant l'inégalité ci-dessus n'est pas immédiat en général. Dans le cas du quota majoritaire et sous des conditions non complètement caractérisées, les rapports $\frac{M_k}{M_l}$ sont très proches des rapports $\frac{w_k}{w_l}$ (Mann and Shapley (1964), Riker and Shapley (1968)). C'est aussi le sens du théorème limite de Penrose (1946) qui affirme que, si le nombre de blocs de représentants est suffisamment grand, alors les deux ratios sont proches pour chaque paire de blocs de représentants. Cette affirmation n'est pas vraie en toute généralité mais l'est sous certaines conditions[21] (Chang, Chua and Machover (2006), Lindner and Machover (2004)). Dans l'Appendice 9, nous étudions dans le détail un exemple où, précisément, cette convergence n'a pas lieu.

Une approche générale et remarquable des questions qui précèdent a été développée par Owen (1972, 1975, 2001). Elle est basée sur le concept d'extension multilinéaire d'un jeu coopératif à utilité transférable. Dans le cas où l'ensemble des joueurs est $\{1, ..., K\}$, un tel jeu est décrit par une fonction d'ensemble $V : S \subseteq \{1, ..., K\} \to V(S) \in \mathbb{R}_+$ telle que $V(\varnothing) = 0$. Son extension multilinéaire est la fonction $f = f_V$ définie sur $[0, 1]^K$ comme suit:

$$f(x_1, x_2, ..., x_K) = \sum_{S \subseteq \{1, ..., K\}} \left\{ \prod_{i \in S} x_i \prod_{i \notin S} (1 - x_i) \right\} V(S)$$

Le vecteur $(x_1, x_2, ..., x_K) \in [0, 1]^K$ peut être interprété comme le vecteur des probabilités décrivant la formation d'une coalition aléatoire $\widetilde{S}$ sous réserve que les appartenances des membres soient le résultat de tirages aléatoires indépendants. Dans ce cas, $f(x_1, x_2, ..., x_K)$ correspond à l'espérance mathématique de la fonction V i.e. $f(x_1, x_2, ..., x_K) = E\left[V(\widetilde{S})\right]$. La propriété la plus remarquable est attachée à la formule suivante :

$$Sh_k(V) = \int_0^1 f_k(t, t, ..., t) dt \text{ où } f_k(x_1, x_2, ..., x_K) \equiv \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, ..., x_K)$$

Dans cette formule, $Sh_k(V)$ désigne la valeur de Shapley du joueur k dans le jeu V c'est-à-dire :

[21] Dans le cas d'un quota quelconque, l'approximation de Penrose n'est pas valide en général (Lindner et Owen (2007)).

$$Sh_k(V) \equiv \sum_{\substack{T \subseteq \{1,...,K\} \\ k \in T}} \frac{(t-1)!(K-t)!}{K!} \left[V(T) - V(T \backslash \{k\} \right]$$

On obtient facilement :

$$f_k(x_1, x_2, ..., x_K) = \sum_{\substack{S \subseteq \{1,...,K\} \\ k \notin S}} \left\{ \prod_{j \in S} x_j \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq k}} (1 - x_j) \right\} (V(S \cup \{k\}) - V(S))$$

Dans cette expression, le coefficient $\prod_{j \in S} x_j \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq k}} (1 - x_j)$ peut s'interpréter comme la probabilité que $\widetilde{S} = S$. D'où l'on déduit que $f_k(x_1, x_2, ..., x_K) = E\left[V\left(\widetilde{S} \cup \{k\} \right) - V(\widetilde{S}) \right]$.

Dans le cas où V est un jeu simple i.e. $V(S) \in \{0, 1\}$ pour tout $S \subseteq \{1, ..., K\}$, on obtient :

$$f_k(x_1, x_2, ..., x_K) = \text{ Prob}(\widetilde{S} \text{ est perdante et } \widetilde{S} \cup \{k\} \text{ est gagnante})$$

Lorsque $\mathcal{W}$ est un jeu majoritaire pondéré décrit par le vecteur de poids $(w_1, w_2, ..., w_n)$ et le quota q, on obtient:

$$f_k(x_1, x_2, ..., x_K) = \text{Prob}(q - w_k \leq Y < q)$$

où Y est la variable aléatoire $\sum_{j \in \{1,...,K\} \backslash \{k\}} Z_j$ et Z_j est la variable aléatoire égale à w_j avec la probabilité x_j et 0 sinon. Puisque $E(Z_j) = x_j w_j$ et $\sigma^2(Z_j) = x_j(1 - x_j) w_j^2$, on déduit du fait que les variables Z_j sont indépendantes :

$$E(Y) = \sum_{j \neq k} x_j w_j \text{ et } \sigma^2(Y) = \sum_{j \neq k} x_j (1 - x_j) w_j^2$$

Sous réserve d'être dans les conditions d'application d'une version du théorème de la limite centrale[22], on en déduit que Y est approximativement égale à une loi normale $\widetilde{Y}$ de moyenne $E(Y)$ et variance $\sigma^2(Y)$. Dans le cas où $(x_1, x_2, ..., x_K) = (t, t, ..., t)$, la variable aléatoire notée $\widetilde{Y}_t$ vérifie:

$$E(\widetilde{Y}_t) = t \sum_{j \neq k} w_j \text{ et } \sigma^2\left(\widetilde{Y}_t\right) = t(1-t) \sum_{j \neq k} w_j^2$$

[22] Ces conditions ne sont pas remplies dans le cadre de la situation examinée dans l'Appendice 9.

On en déduit que :

$$\text{Prob}(q - w_k \leq Y_t < q) = \text{Prob}(q - w_k \leq \widetilde{Y}_t < q) = \Phi\left(\frac{q - E(\widetilde{Y}_t)}{\sigma\left(\widetilde{Y}_t\right)}\right) - \Phi\left(\frac{q - E(\widetilde{Y}_t) - w_k}{\sigma\left(\widetilde{Y}_t\right)}\right)$$

où :

$$\Phi(s) \equiv \int_{-\infty}^{s} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-r^2}{2}} dr$$

On peut utiliser cette approximation pour obtenir une approximation de l'indice de pouvoir $Sh_k = \int_0^1 f_k(t, t, ..., t)\, dt$ du joueur k dans le jeu majoritaire pondéré en substituant $\Phi\left(\frac{q-E(\widetilde{Y}_t)}{\sigma\left(\widetilde{Y}_t\right)}\right) - \Phi\left(\frac{q-E(\widetilde{Y}_t)-w_k}{\sigma\left(\widetilde{Y}_t\right)}\right)$ à $f_k(t, t, ..., t)$ et en procédant à une intégration numérique (Owen (1975)). Similairement, l'indice de pouvoir $B_k = f_k\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{2}\right)$ du joueur k dans le jeu majoritaire pondéré est approximativement égal à:

$$\text{Prob}(q - w_k \leq \widetilde{Y}_{\frac{1}{2}} < q)$$

On peut une fois encore utiliser l'approximation gaussienne pour procéder à une évaluation numérique de B_k. S'agissant de la formule d'approximation de Penrose (1952), c'est-à-dire de la proportionalité de ces indices aux poids, il faut se montrer plus prudent. Les variables aléatoires Z_j sont à valeurs entières dès l'instant où les poids w_j le sont. Pour offrir des formules approximatives de B_k basées sur l'approximation gaussienne, on a besoin de versions locales du théorème de la limite centrale (Davis and McDonald (1995), McDonald (1979), Mukhin (1991), Petrov (1975)) pour des variables à valeurs entières. Des versions du résultat de Penrose ont été démontrées en appliquant ces versions locales (Lindner and Machover (2004)). Il est clair que la relation de Penrose n'a de sens que dans un contexte asymptotique convenablement défini (Lindner and Owen (2007)).

Dans le cas particulier où K est un nombre impair, $q = \frac{K+1}{2}$ et $w_k = 1$ pour tout $k = 1, ..., K$, on déduit directement de la formule de Stirling que l'indice B_k est proportionnel à $\frac{1}{\sqrt{K}}$. Par ailleurs, on déduit immédiatement de la propriété de symétrie de la valeur de Shapley que l'indice SS_k est égal à $\frac{1}{K}$.

Sous réserve d'être dans un cas de validité de l'approximation de Penrose, on en déduit que la probabilité de l'événement "l'électeur i du district k est pivot", i.e. l'indice de Banzhaf d'un électeur générique du district k est proportionnel à :

$$\frac{w_k}{\sqrt{n_k}}$$

On dispose donc d'une formule multiplicative très compacte de la mesure du pouvoir au sens de Banzhaf d'un électeur en fonction de la taille de son district et du nombre de représentants que son district envoie à l'assemblée.

Dans le cas de la mesure de Shapley-Shubik classique, c'est-à-dire dans le cadre du modèle IAC classique, le calcul est plus compliqué. On peut à la suite d'Owen (2001) exploiter le fait que l'extension multilinéaire d'un jeu composé est la composition de l'extension multilinéaire du jeu global et des extensions multilinéaires des jeux locaux. En notant f l'extension multilinéaire du jeu majoritaire pondéré décrivant l'assemblée et g^k l'extension multilinéaire du jeu majoritaire décrivant l'élection des représentants du district k, nous disposons de la formule générale[23] (Owen, 2001) :

$$Sh_k = \frac{1}{n_k} \int_0^1 f_k \left(y^1(t), y^2(t), ..., y^K(t) \right) \frac{dy^k(t)}{dt} dt$$

où:

$$y^j(t) \equiv g^j(t, t, ..., t)$$

Si l'on fait l'hypothèse que les votes dans les différents districts sont indépendants, la formule se simplifie et prend une forme multiplicative. Le modèle IAC^*, présenté dans l'Appendice 1, repose précisément sur cette hypothèse. Dans ce cas, on peut démontrer, sous réserve d'être dans un cas de validité de Penrose que l'indice de Shapley-Shubik modifié d'un électeur générique du district k est alors proportionnel à :

$$\frac{w_k}{n_k}$$

2.3 Composition Généralisée : les Collèges Emboîtés et les Votes Multiples

Edelman (2004) a développé une généralisation de l'opération de composition où les K districts électoraux N_k ne sont plus nécessairement disjoints et où les électeurs ont autant de votes que de collèges auxquels ils appartiennent. Si l'électeur i appartient à $k(i)$ collèges, il votera $k(i)$ fois et il est possible techniquement de voter parfois en faveur de G et parfois en faveur de D. A proprement parler, comme le note Edelman, les contextes de composition où les électorats ne sont pas disjoints sont déjà discutés dans la littérature abstraite sur l'algèbre des jeux simples (Felsenthal et Machover (1998), Taylor et Zwicker (1999)). Par exemple,

[23] On peut ensuite à nouveau utiliser les approximations gaussiennes (Owen (2001)).

le congrés des U.S.A. est modélisé comme la *réunion* de deux jeux simples comportant 537 joueurs et dont les joueurs sont identiques. De même, le processus de décision du conseil des ministres de l'Union Européenne telle que définie par les différents traités est modélisé comme l'*intersection* de trois jeux simples dont les joueurs (ici au nombre de 27) sont identiques. L'union et l'intersection sont des cas particuliers de l'opération de composition. Dans ces modèles, chaque joueur ne dispose que d'un seul pouvoir de vote.

On continuera de noter N la population de l'ensemble des électeurs, i.e. $N = \cup_{1\leq k\leq K} N_k$. Un jeu simple généralisé est un N_k-tuple $\mathcal{W} = (\mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, ..., \mathcal{W}_K)$ où $\mathcal{W}_k$ est un ensemble de parties de N_k vérifiant :

· $(N_1, N_2, ..., N_K) \in \mathcal{W}$

· $(\varnothing, \varnothing, ..., \varnothing) \notin \mathcal{W}$

· Si $(S_1, S_2, ..., S_K) \in \mathcal{W}$ et $S_k \subseteq T_k$ pour tout $k = 1, ..., K$, alors $(T_1, T_2, ..., T_K) \in \mathcal{W}$.

Les coalitions $(S_1, S_2, ..., S_K) \in \mathcal{W}$ sont appelées coalitions gagnantes globales alors que les composantes sont appelées coalitions locales. Dans ce contexte généralisé, Edelman définit un nouvel indice de pouvoir de type Banzhaf de la manière suivante. Etant donné un électeur i et une coalition gagnante globale $S = (S_1, S_2, ..., S_K)$, on dit que i est pivot en S dans la composante k si $i \in S_k$ et $(S_1, ..., S_k \backslash \{i\}, ..., S_K) \notin \mathcal{W}$. Soit

$$Piv(i, S, k) = \begin{cases} 1 \text{ si } i \text{ est pivot en } S \text{ dans la composante } k \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

On note $\chi(\mathcal{W}, i)$ le nombre de fois où i est pivot pour une coalition globale dans une composante donnée i.e. :

$$\chi(\mathcal{W}, i) = \sum_{S\in\mathcal{W}} \sum_{k=1}^{K} Piv(i, S, k)$$

Edelman définit l'indice de pouvoir $\widetilde{B}_i$ comme suit :

$$\widetilde{B}_i = \frac{\chi(\mathcal{W}, i)}{2^{n_1+...+n_K-1}}$$

Il est important de souligner que cette mesure diffère de l'indice de pouvoir de Banzhaf habituel (B_i).

Le jeu simple généralisé qui retient le plus l'attention d'Edelman est celui que nous avons discuté dans la section 2.2. à l'exception de l'hypothèse que les ensembles N_k étaient disjoints. Etant donné un jeu majoritaire pondéré $[q; w_1, ..., w_K]$ sur l'ensemble $\{1, 2, ..., K\}$ et K jeux simples $(N_k, \mathcal{W}_k)$, $(S_1, S_2, ..., S_K) \in \mathcal{W}$ ssi :

$$\sum_{\{k: S_k \in \mathcal{W}_k\}} w_k \geq q$$

Cette opération de composition généralisée diffère de l'opération de composition classique car rien dans la définition ne force à considérer qu'un électeur est dans toutes les coalitions ou dans aucune : il peut être comptabilisé dans certains S_i et non dans certains autres. C'est un peu comme si un électeur avait autant de sosies (doubles, jumeaux,...) que de collèges dans lesquels il est présent.

Edelman utilise ces notions pour étudier l'application suivante : un territoire est constitué de différents districts et chaque district élit un représentant au "Conseil" du territoire. Aux représentants élus dans chaque district s'ajoutent des représentants "territoriaux" élus par l'ensemble du territoire : chaque électeur vote donc deux fois, une fois pour élire son représentant de district et une fois pour choisir les représentants territoriaux. La question qu'il explore est la suivante : quel est, dans ce jeu composé, le nombre de représentants territoriaux qui permet de maximiser le pouvoir de vote (mesuré par $\widetilde{B}_i$) d'un électeur du territoire ? Edelman montre qu'il doit être égal à la racine carrée du nombre total de représentants au Conseil.

Edelman avance plusieurs arguments en faveur de sa définition de l'indice de pouvoir $\widetilde{B}_i$. Les questions qu'il soulève sont discutées dans son article. La première est celle du double comptage qui tient au fait qu'un électeur peut être pivot pour une même coalition globale dans plusieurs composantes. Il est possible de montrer que le problème n'est pas trop sérieux lorsque la taille de l'électorat est suffisamment grande. La seconde question est plus sérieuse. La mesure de pouvoir $\widetilde{B}_i$ suppose que les votes d'un même électeur sont indépendants les uns des autres[24]. Edelman montre à l'aide de certains exemples que les indices B_i et $\widetilde{B}_i$ peuvent être très différents.

3 Application à une Représentation Simplifiée de la Loi du "Double Vote".

3.1 Notation et Hypothèses Principales.

Pour appliquer la théorie classique de la mesure du pouvoir, nous allons passer sous silence certaines difficultés et nous concentrer sur un cadre simplifié qui, selon nous, ne déforme pas l'essentiel du mode de scrutin instauré par la loi du "double vote".

• Nous supposons qu'il n'y a que deux types de candidats : des candidats de gauche et des candidats de droite. Ce modèle binaire est le cadre habituel d'application de la théorie des indices et nous oblige à ignorer toute autre considération. L'avantage fondamental du

[24]Le problème de la corrélation entre les votes est étudié de façon abstraite par certains auteurs comme par exemple Kaniovski (2006).

modèle binaire est l'équivalence entre vote sincère et vote stratégique, équivalence qui cesse d'être vraie en présence de trois options ou plus. Du point de vue des préférences, il y aura donc deux types d'électeurs : les électeurs de gauche et les électeurs de droite.

• Nous supposons que la population totale des électeurs est divisée en K départements de taille identique, eux mêmes subdivisés en A arrondisssements de taille identique notée L. La taille des départements est donc égale à AL et la taille de l'électorat total est égale à ALK.

• Dans ce contexte symétrique, il y a deux classes d'électeurs : ceux qui ne votent qu'une seule fois (les "petits" électeurs) et ceux qui votent deux fois (les "grands" électeurs). Nous voulons calculer les indices de Banzhaf et de Shapley-Shubik révisé des deux types d'électeurs. Pour continuer à maintenir la symétrie à son maximum, nous allons supposer que le nombre de grands électeurs est le même dans chaque département et qu'il se répartit en parts égales dans chaque arrondissement. Le nombre de grands électeurs d'un arrondissement est ainsi noté M (avec $M \leq L$) et $\frac{M}{L}$ représente la fraction de grands électeurs par arrondissement (et par département, compte tenu de nos hypothèses).

• Le scrutin de chaque arrondissement est uninominal (en accord avec la loi). En revanche, nous supposerons pour simplifier que chaque collège départemental élit le même nombre D de députés ($D \geq 1$). Le nombre de députés à la chambre est ainsi égal à $K(D + A)$.

Een prenant $K = 86$ départements, $A = 3$ arrondissements par départements, $D = 2$ députés élus par les grands électeurs de chaque département et $\frac{M}{L} = \frac{1}{4}$, on retrouve les principaux éléments caractéristiques de la loi électorale de 1820 : la chambre des députés compte $86 \times (2 + 3) = 430$ membres ; 258 (soit 3/5) sont élus par tous les électeurs et 172 (soit 2/5) sont élus par les électeurs les plus riches qui constituent le quart de l'électorat. L'environnement électoral considéré par Edelman (2004) dans son application mentionnée plus haut est un cas particulier de notre modèle dans lequel tous les électeurs votent deux fois. On a dans cette application $K = 1$ et $\frac{M}{L} = 1$.

• Enfin, comme Edelman, nous allons dériver des formules approximatives de calcul du pouvoir de chaque classe d'électeurs en négligeant les problèmes de corrélation résultant du fait que les grands électeurs votent plusieurs fois. Nous supposons ainsi que le vote d'un grand électeur dans le collège d'arrondissement est indépendant de son vote dans le collège départemental.

Clairement, l'indépendance est violée au sein de chaque département car la connaissance des votes du collège de département biaise[25] dans une direction le vote des collèges

[25]Le fait que les grands électeurs soient aussi petits électeurs dans leur arrondissement implique que les résultats électoraux (vus comme les réalisations de $A + 1$ variables aléatoires binaires) ne sont pas

d'arrondissement. Par ailleurs, au niveau de l'assemblée, la probabilité d'être pivot pour un député issu d'un département donné dépend à son tour des résultats électoraux du département considéré. Intuitivement, ce second problème de corrélation est d'une intensité inférieure au premier si la chambre des députés est suffisamment grande c'est-à-dire ici si le nombre de départements K est suffisamment grand. Lorsqu'à l'inverse K est petit, la probabilité d'être pivot ne peut pas être factorisée comme indiquée ci-dessous. Par exemple dans le cas où $K = D = 1$ et $A = 3$, la probabilité d'être pivot pour un petit électeur est deux fois la probabilité de l'intersection de 3 événements : le petit électeur est pivot dans son arrondissement, l'autre arrondissement vote à gauche et le département vote à droite. Dans l'Appendice 6, nous offrons quelques éléments de réponse à ces questions.

Dans le cas du modèle aléatoire IAC, plusieurs options pour amender la version classique en allant vers plus d'indépendance s'offrent à nous. En premier lieu, nous appliquons IAC département par département (et non uniformément à l'ensemble de tous les électeurs). Cette version, déjà mentionnée, notée IAC^* et présentée dans l'Appendice 1, permet d'évacuer la question du calcul délicat de l'indice de Shapley-Shubik dans les jeux composés. S'agissant de la version d'IAC à retenir au sein de chaque département, plusieurs voies sont possibles.

Dans le même esprit qu'Edelman, nous allons dédoubler les grands électeurs et faire comme si une moitié des grands électeurs votait uniquement dans le collège départemental et une autre moitié votait uniquement dans les collèges d'arrondissement. Les deux versions que nous avons retenues supposent toutes les deux une application séparée d'IAC au sein de chaque district (les A districts d'arrondissements et le district de département). Le choix résiduel est alors binaire. On peut appliquer IAC uniformément au sein du district ou on peut l'appliquer séparément pour les deux sous-populations. Le premier modèle sera noté IAC_* et le second modèle sera noté IAC_{**}. Dans le cadre de l'IAC_*, la probabilité qu'un électeur soit pivot dans son district est inversement proportionnelle au nombre d'électeurs dans le district. La question est plus complexe dans le cas de la version IAC_{**}, qui fait l'objet de l'Appendice 2. Nous y démontrons que la probabilité d'être pivot évolue comme l'inverse de la taille de la sous-population la plus grande. On observera par ailleurs que ces deux versions sont compatibles avec le modèle IAC^*mentionné dans le paragraphe précédent: l'indépendance des votes au sein des districts implique l'indépendance entre les votes des départements.

Notre approche, basée sur un "dédoublement" artificiel des grands électeurs est destinée à simplifier les calculs. Cette simplification est naturellement discutable du point de vue de l'analyse des conséquences du double vote. La dérivation de formules analytiques exactes et

indépendants les uns des autres.

générales semble hors d'atteinte car la prise en compte des corrélations soulève des difficultés combinatoires assez délicates. Dans les Appendices 3, 4 et 5 nous offrons une analyse de l'environnement électoral avec corrélation dans trois cas particuliers afin d'apprécier les écarts par rapport au cas de dédoublement. La question qui se pose est de savoir si ces écarts restent significatifs lorsque les principaux paramètres prennent des valeurs élevées.

3.2 Calcul des Indices de Pouvoir

Nous nous proposons donc de mesurer, à l'aide des indices de Banzhaf et de Shapley-Shubik révisé, le pouvoir de vote de chaque catégorie d'électeurs. Considérons, dans un arrondissement donné d'un département donné, un petit électeur et un grand électeur. Le petit électeur est pivot s'il est pivot dans l'arrondissement et si de plus le représentant élu de cet arrondissement est lui-même pivot à la chambre des députés. Quant au grand électeur, il est pivot s'il est pivot dans son collège d'arrondissement et si le représentant élu de l'arrondissement est pivot à la chambre **ou** s'il est pivot dans son collège de département et si l'élu (ou les élus) de ce département est (sont) pivot(s) à la chambre (le "ou" est ici inclusif). Introduisons alors les sous-ensembles de E (où E désigne l'ensemble des profils de préférences possibles) associés aux événements suivants :

$\mathbf{P}$: "le petit électeur est décisif" ;
$\mathbf{G}$: "le grand électeur est décisif" ;
$\mathbf{R}_a$: "le député d'arrondissement est décisif" ;
$\mathbf{R}_d$: "le ou les députés de département sont décisifs" ;
$\mathbf{P}_a$: "le petit électeur est décisif dans son collège d'arrondissement" ;
$\mathbf{G}_a$: "le grand électeur est décisif dans son collège d'arrondissement" ;
$\mathbf{G}_d$: "le grand électeur est décisif dans son collège de département".

Nous avons :

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_a \cap \mathbf{R}_a$$

et

$$\mathbf{G} = (\mathbf{G}_a \cap \mathbf{R}_a) \cup (\mathbf{G}_d \cap \mathbf{R}_d).$$

Notons $\pi_\alpha(\mathbf{X})$ la probabilité de l'événement $\mathbf{X}$ lorsque l'ensemble E des profils de préférences possibles est muni de la mesure de probabilité α. Le pouvoir de vote d'un petit électeur est donné par $\pi_\alpha(\mathbf{P})$ et celui d'un grand électeur par $\pi_\alpha(\mathbf{G})$. Nous obtenons l'indice de Banzhaf en prenant $\alpha = IC$ et les indices de Shapley-Shubik révisés introduits ci-dessus en prenant $\alpha = IAC_*$ et $\alpha = IAC_{**}$.

L'opération de dédoublement et les révisions du modèle IAC auxquelles nous avons procédé conduisent alors, pour les trois α considérés, aux égalités suivantes :

$$\pi_\alpha(\mathbf{P}) = \pi_\alpha(\mathbf{P}_a) \times \pi_\alpha(\mathbf{R}_a)$$

et

$$\pi_\alpha(\mathbf{G}) = \pi_\alpha(\mathbf{G}_a) \times \pi_\alpha(\mathbf{R}_a) + \pi_\alpha(\mathbf{G}_d) \times \pi_\alpha(\mathbf{R}_d) - \pi_\alpha((\mathbf{G}_a \ \cap \ \mathbf{R}_a) \ \cap \ (\mathbf{G}_d \ \cap \ \mathbf{R}_d)).$$

Dans l'expression de $\pi_\alpha(\mathbf{G})$, nous pouvons, au moins en première analyse, négliger le troisième terme car ce terme est du second ordre par rapport aux deux premiers : on néglige donc les profils de préférences dans lesquelles le grand électeur est à la fois décisif dans le collège d'arrondissement et dans le collège départemental, obtenant ainsi :

$$\pi_\alpha(\mathbf{G}) \approx \pi_\alpha(\mathbf{G}_a) \times \pi_\alpha(\mathbf{R}_a) + \pi_\alpha(\mathbf{G}_d) \times \pi_\alpha(\mathbf{R}_d).$$

Nous allons enfin poser que

$$\pi_\alpha(\mathbf{R}_d) = D\pi_\alpha(\mathbf{R}_a).$$

Nous considérons donc qu'un député de département a autant de chances d'être décisif qu'un député d'arrondissement et que D députés de département ont D fois plus de chances d'être décisif qu'un seul[26]. Il en résulte que le rapport entre le pouvoir d'un grand électeur et celui d'un petit s'écrit :

$$\frac{\pi_\alpha(\mathbf{G})}{\pi_\alpha(\mathbf{P})} \approx \frac{\pi_\alpha(\mathbf{G}_a) + D\pi_\alpha(\mathbf{G}_d)}{\pi_\alpha(\mathbf{P}_a)}. \qquad (1)$$

Nous sommes alors en mesure de proposer des formules de calcul simples en précisant le modèle probabiliste sous-jacent. Si l'on utilise la mesure du pouvoir préconisée par Banzhaf (qui suppose implicitement $\alpha = IC$), on sait que le pouvoir d'un électeur dans un collège donné est proportionnel à l'inverse de la racine carrée du nombre d'électeurs (supposé elevé) dans le collège (voir Section 2.2). Précisément, l'on a $\pi_{IC}(\mathbf{P}_a) = \pi_{IC}(\mathbf{G}_a) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi L}}$ puisqu'il y a L électeurs dans un arrondissement et $\pi_{IC}(\mathbf{G}_d) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi MA}}$ puisqu'il y a MA grands électeurs dans un département. La relation (1) donne ainsi, en posant $\mu = M/L$:

$$\frac{\pi_{IC}(\mathbf{G})}{\pi_{IC}(\mathbf{P})} \approx 1 + D\sqrt{\frac{1}{A\mu}}. \qquad (2)$$

Si l'on applique maintenant le modèle de Shapley-Shubik révisé IAC_*, le pouvoir d'un électeur dans un collège donné est inversement proportionnel au nombre d'électeurs du

[26]Autrement dit, nous supposons que nous sommes dans une situation où l'approximation de Penrose est valide, c'est-à-dire que dans l'assemblée des députés, poids et pouvoirs coïncident. Cette hypothèse implique bien sûr (entre autres choses) que le nombre de départements soit élevé. .

collège. Nous obtenons donc $\pi_{IAC_*}(\mathbf{P}_a) = \pi_{IAC_*}(\mathbf{G}_a) \approx \frac{1}{L}$ et $\pi_{IAC_*}(\mathbf{G}_d) \approx \frac{1}{MA}$, ce qui donne :

$$\frac{\pi_{IAC_*}(\mathbf{G})}{\pi_{IAC_*}(\mathbf{P})} \approx 1 + \frac{D}{A\mu}. \qquad (3)$$

Enfin, si l'on applique le modèle de Shapley-Shubik révisé IAC_{**} , le pouvoir d'un électeur dans un arrondissement donné est inversement proportionnel au nombre de petits électeurs de l'arrondissement (voir l'Appendice 2 pour une preuve de ce résultat). Nous obtenons dans ce cas $\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{P}_a) = \pi_{IAC_{**}}(\mathbf{G}_a) \approx \frac{1}{L-M}$ et $\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{G}_d) \approx \frac{1}{MA}$, ce qui donne[27] :

$$\frac{\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{G})}{\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{P})} \approx 1 + \frac{D\,(1-\mu)}{A\mu}. \qquad (4)$$

Le rapport des pouvoirs entre un grand et un petit électeur dépend donc, dans notre modélisation simplifiée, de trois paramètres : le nombre d'arrondissements par département (A), le nombre de députés élus dans le collège départemental (D) et la proportion μ de grands électeurs ; il est par ailleurs indépendant du nombre K de départements. En prenant $A = 3$, $D = 2$ et $\mu = 1/4$, afin de se rapprocher autant que faire se peut de l'environnement électoral de 1820, nous obtenons grâce aux relations (2), (3) et (4) $\frac{\pi_{IC}(\mathbf{G})}{\pi_{IC}(\mathbf{P})} = 3,31$, $\frac{\pi_{IAC_*}(\mathbf{G})}{\pi_{IAC_*}(\mathbf{P})} = 3,67$ et $\frac{\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{G})}{\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{P})} = 3$: le pouvoir d'un grand électeur apparaît ainsi comme étant entre 3 et 4 fois plus élevé que celui d'un petit électeur ! Les relations (2), (3) et (4) indiquent en outre que, conformément à l'intuition, le rapport de pouvoir entre les deux catégories d'électeurs augmente avec D (plus le nombre de députés élus par un collège départemental est élevé, plus le pouvoir relatif d'un grand électeur est important) et diminue si le législateur élève les valeurs de A et/ou de μ (une augmentation de A ou de μ "dilue" le pouvoir d'un grand électeur puisqu'alors la taille MA du collège départemental s'élève). Les Tableaux 1, 2 et 3 précisent l'impact de ces différents paramètres.

[27]Nous supposons ici qu'il y a d'avantage de petits électeurs que de grands électeurs, i.e. $\mu < 1/2$. Si $\mu \geq 1/2$, comme dans Edelman (2004), la formule (4) se réduit à $\frac{\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{G})}{\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{P})} \simeq 1 + \frac{D}{A}$ car $\pi_{IAC_{**}}(\mathbf{G}_a) = \pi_{IAC_{**}}(\mathbf{P}_a) \simeq \frac{1}{M}$. Notons que dans le cas où $\mu = 1$, on doit interpréter le rapport $\frac{\pi_\alpha(\mathbf{G})}{\pi_\alpha(\mathbf{P})} - 1$ pour $\alpha = IC, IAC_*$ et IAC_{**} non pas comme un rapport entre les pouvoirs des deux catégories d'électeurs (il y en a une seule ici) mais comme un rapport entre les pouvoirs des deux votes.

	Banzhaf (IC)	Shapley-Shubik (IAC_*)	Shapley-Shubik (IAC_{**})
$A = 1$	5	9	7
$A = 2$	3,83	5	4
$A = 3$	3,31	3,67	3
$A = 4$	3	3	2,5
$A = 5$	2,79	2,60	2,20
$A = 6$	2,63	2,33	2
$A = 7$	2,51	2,14	1,86
$A = 8$	2,41	2	1,75
$A = 9$	2,33	1,89	1,67
$A = 10$	2,26	1,80	1,60

Tableau 1. Rapport des pouvoirs en fonction de A ($D = 2$, $\mu = \frac{1}{4}$, L grand)

	Banzhaf (IC)	Shapley-Shubik (IAC_*)	Shapley-Shubik (IAC_{**})
$D = 1$	2,15	2,33	2
$D = 2$	3,31	3,67	3
$D = 3$	4,46	5	4
$D = 4$	5,62	6,33	5
$D = 5$	6,77	7,67	6
$D = 6$	7,93	9	7
$D = 7$	9,08	10,33	8
$D = 8$	10,27	11,67	9
$D = 9$	11,39	13	10
$D = 10$	12,55	14,33	11

Tableau 2. Rapport des pouvoirs en fonction de D ($A = 3$, $\mu = \frac{1}{4}$, L grand)

	Banzhaf (IC)	Shapley-Shubik (IAC_*)	Shapley-Shubik (IAC_{**})
$\mu = 1/10$	4,65	7,67	7
$\mu = 1/4$	3,31	3,67	3
$\mu = 1/3$	3	3	2,33
$\mu = 1/2$	2,63	2,33	1,67
$\mu = 3/4$	2,33	1,89	1,67
$\mu = 9/10$	2,22	1,74	1,67
$\mu = 1$	2,15	1,67	1,67

Tableau 3. Rapport des pouvoirs en fonction de $\boldsymbol{\mu}$ ($A = 3$, $D = 2$, L grand)

3.3 Validité de l'Approximation de Penrose dans le Cas du Dédoublement

Les résultats que nous venons de présenter reposent sur diverses hypothèses simplificatrices dont la plus discutable est certainement celle du dédoublement des grands électeurs, qui votent de manière indépendante dans le collège d'arrondissement et dans le collège de département. Mais nous ne saurions passer sous silence notre hypothèse selon laquelle le pouvoir d'un député de département est D fois supérieur à celui d'un député d'arrondissement au sein du parlement. L'objet principal de la présente sous-section est de mesurer, à l'aide des programmes de D.et R. Leech à Warwick comment changer les formules d'approximation dans la cas où les conditions d'application de l'approximation de Penrose ne sont pas vérifiées. Ces calculs numériques nous permettront d'évaluer la précision d'une dimension des formules "théoriques" de la sous-section précédente.

Contrairement à nos formules analytiques qui expriment des valeurs asymptotiques, les calculs numériques que nous avons effectués considèrent un nombre fini d'électeurs. Afin d'éviter le recours à des mécanismes (toujours discutables) de partage des ex-aequo lorsque le nombre d'électeurs du collège est pair, nous avons choisi de ne considérer qu'une (large) classe de configurations symétriques impaires. Nous y parvenons en fixant les valeurs des paramètres de la manière suivante. Soit M un entier impair et Q un entier strictement supérieur à 1. Nous supposons qu'il y a dans l'arrondissement type M grands électeurs et un total de $L = (Q + 1)M \ + \ 1$ électeurs si $Q + 1$ est pair ($(Q + 1)M$ si $Q + 1$ est impair). Ainsi, si $Q = 9$, les grands électeurs représentent le dixième de l'électorat.

Nous avons étudié analytiquement trois cas particuliers en appendice :

- Appendice 3 : $Q = 3,\ A = 1,\ D = 1,\ K = 1$
- Appendice 4 : $Q = 3,\ A = 2,\ D = 1,\ K = 1.$
- Appendice 5 : $Q = 3,\ A = 3,\ D = 2,\ K = 1.$

Les difficultés rencontrées dans l'étude de ces cas stylisés nous ont convaincus de la nécessité de faire appel à des méthodes de simulations car l'étude du cas général semble pour le moment hors de portée. A la question de savoir quel peut-être, *a priori*, l'impact de l'hypothèse de dédoublement sur le pouvoir de vote des grands électeurs, Vidu (2011) apporte des réponses basées sur des simulations de type Monte Carlo. Pour pouvoir identifier le degré de validité des formules théoriques, il est cependant important de séparer les conséquences de l'hypothèse de dédoublement de celles attachées à l'approximation de Penrose. Les simulations de Vidu (2011) examinent aussi cette décomposition. Le reste de cette section est consacré à l'étude théorique de la validité de l'approximation de Penrose dans le cas de l'hypothèse de dédoublement pour les valeurs $L = 45,\ M = 11$, soit $\mu \simeq 1/4,\ A = 3$

et $K = 5$.

Notons que dans ce cas la chambre est composé de $15 + 5D$ députés mais les $5D$ derniers peuvent être regroupés en 5 paquets de taille D où au sein de chaque paquet, les votes sont parfaitement corrélés. Il est donc plus commode de regarder ce jeu comme le jeu majoritaire pondéré fort avec 20 joueurs: 15 ayant un poids égal à 1 et 5 ayant un poids égal à D. Le quota majoritaire (si D est pair, ce que nous supposons dans ce qui suit) vaut alors $\frac{16+5D}{2}$. A l'aide du programme IPDIRECT de D. et R. Leech mis au point à Warwick, on peut calculer la valeur exacte[28] des pouvoirs des deux types de députés dans l'assemblée. Notons $R(D)$ le rapport exact du pouvoir des joueurs de poids D et du pouvoir des joueurs de poids 1 dans l'assemblée. Les résultats des calculs sont consignés dans le Tableau 4 ci-dessous:

D	$R(D)$
2	2.063
4	4.398
6	9.431
8	26.677
10	107.703

Tableau 4. Valeurs de $R(D)$
$(L = 45, M = 11, K = 5, A = 3)$

On constate que l'approximation de Penrose qui est acceptable pour les valeurs de D égales à 2 et 4 cesse de l'être pour les valeurs suivantes. Ceci nous invite à revoir notre formule théorique en remplacant D par $R(D)$. Dans le cas de dédoublement des grands électeurs, on peut en fait calculer avec exactitude la probabilité d'être pivot. La probabilité exacte d'être pivot d'un petit électeur dans son collège est $\frac{\binom{44}{22}}{2^{44}} = 0.1196$ dans le cas IC alors que dans la formule théorique nous avons utilisé l'approximation $\sqrt{\frac{2}{45\pi}} = 0.11894$. La probabilité exacte d'être pivot d'un grand électeur dans le collège départemental est $\frac{\binom{32}{16}}{2^{32}} = 0.13995$ dans le cas IC alors que dans la formule théorique nous avons utilisé l'approximation $\sqrt{\frac{2}{33\pi}} = 0.13889$. Dans le cas IC, les valeurs du rapport exact des pouvoirs pour les différentes valeurs de D est consigné dans le Tableau 5 ci-dessous:

[28] Il faut entendre ici le qualificatif "exacte" dans le contexte de l'hypothèse de dédoublement et sous réserve de négliger le double comptage résultant du fait qu'un grand député peut être simultanément pivot dans deux collèges. L'introduction de la corrélation introduit deux sortes de difficultés. D'une part, au sein d'un même département, les $A + 1$ événements "être pivot" ne sont plus indépendants. D'autre part, dans l'assemblée, au sein du groupe des députés issus d'un même département, les couleurs politiques des députés sont corrélées comme cela est montré dans les Appendices 3, 4 et 5. Cette seconde difficulté est abordée dans Le Breton, Lepelley et Smaoui (2011).

D	Rapport des pouvoirs
2	3.414
4	6.1463
6	12.036
8	32.216
10	127.03

Tableau 5. Valeurs Exactes (IC) Votes Indépendants : impact du paramètre D

$(L = 45, M = 11, K = 5, A = 3)$

La probabilité exacte d'être pivot d'un petit électeur dans son collège dans le cas IAC_* est $\frac{1}{45} = 2.2222 \times 10^{-2}$ alors que celle d'un grand électeur dans le collège départemental est $\frac{1}{33} = 3.0303 \times 10^{-2}$. Dans le cas IAC_*, le rapport des pouvoirs vaut $1 + \frac{45}{33}R(D)$. Les valeurs du rapport exact des pouvoirs pour les différentes valeurs de D sont consignées dans le Tableau 6 ci-dessous:

D	Rapport des pouvoirs
2	3.8132
4	6.9973
6	13.86
8	37.378
10	147.87

Tableau 6. Valeurs Exactes (IAC$_*$) Votes Indépendants : impact du paramètre D

$(L = 45, M = 11, K = 5, A = 3)$

Enfin dans le cas IAC_{**}, la probabilité exacte d'être pivot d'un petit électeur dans son collège est $\frac{1}{33} = 3.0303 \times 10^{-2}$ alors que celle d'un grand électeur dans le collège d'arrondissement vaut $\frac{1}{34}$. La probabilité exacte d'être pivot d'un grand électeur dans le collège de département est $\frac{1}{33}$ Dans le cas IAC_{**},le rapport des pouvoirs vaut donc $\frac{33}{34}+R(D)$. Les valeurs du rapport exact des pouvoirs pour les différentes valeurs de D est consigné dans le tableau 7 ci-dessous:

D	Rapport des pouvoirs
2	3.0336
4	5.3686
6	10.402
8	27.648
10	108.67

Tableau 7. Valeurs Exactes (IAC$_{**}$) Votes Indépendants : impact du paramètre D

$(L = 45, M = 11, K = 5, A = 3)$

Au terme de ces calculs, on constate que l'approximation de Penrose doit être considérée avec précaution dans le cas où la taille de la chambre (ici 25) est n'est pas très élevée. Comme nous l'avons déjà fait remarquer, l'approximation de Penrose est (sous réserve de quelques qualifications) valide lorsque le nombre K de départements est assez élevé. Cette section montre cependant que l'extension des formules théoriques (2), (3) et (4) au cas général (c'est-à-dire pour une valeur de K quelconque, le cas échéant petite) ne pose aucun problème dès l'instant où l'on sait calculer $R(D, K, A)$, le rapport du pouvoir des deux types de députés dans le jeu majoritaire fort à $KA + K$ joueurs où KA joueurs ont un poids de 1 et K joueurs ont un poids de D Ici nous avons calculé $R(D) = R(D, 5, 3)$. Nos calculs doivent être comparés aux simulations effectuées par Vidu. Dans l'ensemble, ils coïncident à quelques exceptions près qu'il faudrait mieux comprendre : arrondis, erreurs d'échantillonage... Lorsque $K = 11$ et $A = 3$, on obtient une chambre composée de $33 + 11D$ députés analysée comme un jeu à 44 joueurs. Le Tableau 8 ci-dessous reproduit le cacul de $R(D, 11, 3)$ pour quelques valeurs de D. Ces calculs ont été effectués à l'aide du programme IPGENF également mis au point par D. et R. Leech à Warwick[29]. On constate que l'approximation de Penrose est plus satisfaisante même si elle est loin d'être acceptable lorsque D devient grand.

	Banzhaf du "petit" député	Banzhaf du "gros" député	$R(D)$
$D = 2$	0.090692	0.183843	2.0271
$D = 4$	0.054397	0.223018	4.0998
$D = 6$	0.036743	0.233829	6.3639
$D = 8$	0.023721	0.239417	10.093
$D = 10$	0.013554	0.242807	17.914

Tableau 8. Rapport des pouvoirs en fonction de D ($A = 3$ et $K = 11$)

En résumé, les formules (2), (3) et (4) que nous avons proposées doivent être recadrées si K n'est pas très élevé. Néanmoins, sous réserve de qualifications, elles peuvent être considérées comme fiables -dans le cadre de notre modèle symétrique- si l'on a de bonnes raisons de penser que les votes des grands électeurs ne sont pas corrélés. Si l'on pense en

[29] Ils considérent ce programme comme le plus commode en pratique. Précisément, ils écrivent : "It computes the Banzhaf, Penrose and Coleman indices by the method of generating functions. Very fast algorithm that can be applied to voting bodies with any number of members but the the total number of votes it can handle is limited by the storage requirements. Requires quota and weights to be integers. The implementation here is limited to voting bodies with a maximum of 200 members. This is the best option for most applications".

revanche que ces votes sont parfaitement corrélés, alors la précision dépend de l'hypothèse probabiliste utilisée. Les simulations conduites par Vidu (2011) suggérent que la formule (2) demeure valide alors que les formules (3) et (4), fondées sur les modèles IAC_* et IAC_{**}, sous-estiment le pouvoir des grands électeurs par rapport à celui des petits.

4 Conclusion

Dans ce travail, nous avons procédé à une analyse du pouvoir des deux classes d'électeurs introduites par la loi du 20 Juin 1820. Cette analyse nous a conduits à proposer un modèle simplifié du mode de scrutin instauré par cette loi. Ce modèle présente, en tant que tel, un intérêt théorique puisqu'il étend l'analyse d'Edelman (2004) dans deux directions : d'une part nous avons introduit deux classes d'électeurs, et d'autre part, nous ne nous sommes pas contentés de fonder nos calculs probabilistes sur l'hypothèse IC (indice de Banzhaf) puisque nous avons également considéré l'hypothèse IAC (indice de Shapley-Shubik), que nous avons revisitée pour l'occasion en y introduisant d'avantage d'indépendance.

D'un point de vue appliqué, nous avons vu que dans le cas où $K = 86$, $A = 3$ et $D = 2$, notre modèle se rapprochait à certains égards de l'environnement électoral qui prévalait en 1820. Les résultats obtenus avec ce jeu de paramètres indiquent que le pouvoir des grands électeurs, qui votent deux fois, est trois à quatre fois plus élevé que celui des peties électeurs. Cette conclusion illustre, s'il en était besoin, l'intérêt que peut présenter l'usage des outils de la théorie des jeux coopératifs pour l'analyse d'une loi électorale. Nos résultats semblent par ailleurs relativement robustes : les simulations réalisées par Vidu (2011) suggèrent que l'impact d'un vote corrélé des grands électeurs est assez limité et que l'hypothèse d'indépendance qui fonde les formules analytiques que nous avons proposées tend plutôt à sous-estimer le pouvoir relatif des grands électeurs.

Dans ce travail, nous avons procédé à une analyse du pouvoir des deux classes d'électeurs introduites par la loi du 20 Juin 1820. Cette analyse nous a conduit à proposer un modèle simplifié du mode de scrutin instauré par cette loi. Ce modèle présente, en tant que tel, un intérêt théorique puisqu'il généralise la modélisation introduite par Edelman (2004) dans un contexte voisin. La généralisation proposée étend le modèle d'Edelman dans deux directions: d'une part nous avons introduit deux classes d'électeurs, et d'autre part, nous ne nous somme pas contentés de fonder nos calculs probabilistes sur l'hypothèse IC (indice de Banzhaf) puisque nous avons églement considéré l'hypothèse IAC (indice de Shapley-Shubik), que nous avons revisitée pour l'occasion.

D'un point de vue appliqué, nous avons vu que dans le cas où $K = 86$, $A = 3$ et

$D = 2$, notre modèle se rapprochait de l'environnement électoral qui prévalait en 1820. Reste cependant une ombre au tableau : l'hypothèse de symétrie entre les départements d'une part, et au sein des arrondissements d'autre part, que nous avons introduite dans la totalité de l'étude. En réalité, la situation est beaucoup moins symétrique que celle retenue dans cette modélisation et le pouvoir d'un petit ou grand électeur varie certainement d'un département à l'autre. En tout état de cause, la recherche d'une division en circonscriptions électorales de manière à assurer une représentation équitable n'a pas été un souci majeur du législateur. La loi du 10 mai 1821 qui détermine la circonscription de chaque arrondissement électoral offrait les inégalités les plus choquantes, que le rapporteur du projet à la chambre des députés essayait de justifier en rappelant d'autres inégalités non moins choquantes, mais nécessaires selon lui, qui existaient dans la loi électorale[30]. Les électeurs se répartissent entre les départements suivant des chiffres qui varient entre 9414 pour le département de la Seine et 41 pour la Corse. La Seine-Inférieure arrive immédiatement après la Seine avec un chiffre de 3902. Viennent ensuite quatre autres départements qui ont plus de 2000 électeurs ; trente en ont plus de 1000. En queue de liste figurent huit départements qui ont moins de 400 électeurs[31].

La prochaine étape de notre projet consistera à s'affranchir autant que faire se peut de cette hypothèse de symétrie. Pour ce faire, nous comptons nous appuyer sur l'atlas historique des circonscriptions électorales Françaises établi par Gaudillère (1995). Notons tout d'abord que 7 départements n'ont qu'un collège de département. Pour ces 7 départements $A = 0$ et $D = 2$. Pour tous les autres départements, on constate une certaine hétérogénéité. Le rapport $\frac{3}{5}$ est de loin le plus fréquent. Parfois il est plus bas : il prend la valeur $\frac{1}{2}$ (par exemple, $A = 2$ et $D = 1$ pour le Cher et la Creuse, $A = 4$ et $D = 2$ pour la Dordogne et $A = 8$ et $D = 4$ pour le Nord et la Seine). Parfois il est plus haut : il prend parfois la valeur $\frac{3}{4}$ (par exemple, $A = 4$ et $D = 3$ pour la Haute-Garonne et l'Ile-et-Vilaine) et même 1 (par exemple, $A = D = 2$ pour la Lozère et la Meuse). Il faudra également tenir compte

[30] De ce dernier point de vue, ce passage du discours de M. de la Bourdonnaye est des plus piquants : "*Sans doute, il serait désirable que chaque électeur investi des mêmes droits pût les exercer dans la même proportion. Mais s'il est démontré que ce but ne puisse être atteint dans toute l'étendue de la France, si cette inégalité se trouve même sanctionnée par nos lois, si elles l'ont consacrée dans 7 départements, si elle existe déjà de fait de département à département dans une proportion telle que le collège électoral de la Seine, qui ne nomme qu'un député, contient à lui seul autant d'électeurs que quatre ou cinq collèges d'électeurs réunis de quelques départements du midi qui en envoient à la chambre 8 à 10; si le collège électoral de la Corse qui se compose de 36 votants, élit deux députés, tandis que plusieurs collèges électoraux de départements industrieux qui renferment un nombre vingt fois plus considérable d'électeurs, n'ont droit d'en choisir qu'un seul, il faut bien convenir que l'égalité de nombre dans les électeurs de collèges d'arrondissement d'un même département, n'est ni dans l'esprit de la charte, ni le but d'un travail de circonscription parce que la nature des choses y résiste.*"

[31] Par ailleurs, on peut relever de 1820 à 1823 plus de 300 arrondissements qui n'ont pas 200 électeurs.

de la taille de l'électorat de chaque collège pour apprécier l'effet pur résultant d'un écart par rapport à une représentation proportionnelle des électorats.

Notons enfin que dans ce papier, nous avons supposé qu'*ex ante*, le vote des différents électeurs (grands et petits) était complètement aléatoire. Nous avons proposé différents modèles décrivant le tirage aléatoire simultané des préférences de chaque électeur. Pour exprimer un jugement sur l'adéquation empirique des différents modèles aléatoires en compétition[32], il conviendrait de procéder à deux généralisations de taille. La première consisterait à abandonner l'hypothèse de symétrie retenue systématiquement dans ce papier. Cette question très difficile vient d'être évoquée ci-dessus. La seconde généralisation consisterait à introduire un *espace de caractéristiques* (espace de types) qui permettrait de décrire chaque électeur par un vecteur de caractéristiques (âge, richesse,...). La probabilité uniforme $p = p(P_i = G)$ que l'électeur i soit de gauche serait alors remplacée par une probabilité conditionnelle $p\left(P_i = G \mid \theta_i\right)$ où θ_i désigne le vecteur de caractéristiques de l'électeur i. Nous disposerions ainsi d'un modèle économétrique structurel du vote des électeurs où le vecteur des caractéristiques joueraient le rôle des *"covariates"* et le bruit pur serait généré par l'un des modèles développés en Appendice. Avec un tel modèle, nous pourrions sur la base des données électorales disponibles et en utilisant les techniques inférentielles appropriées, choisir entre les modèles de bruit (IC et les différentes variantes d'IAC) et estimer le poids des "covariates" dans l'explication du vote[33].

5 Appendices

5.1 Appendice 1 : Un Nouveau Modèle Aléatoire pour les Jeux Composés

La population totale des électeurs N est partitionnée en K districts électoraux: $N = \cup_{1\leq k\leq K} N_k$. Les n_k électeurs du district k élisent sur la base d'un jeu simple $\mathcal{W}_k$, w_k représentants (les w_k représentants du district k sont tous de droite ou tous de gauche). L'assemblée comprendra donc au total $\sum_{1\leq k\leq K} w_k$ représentants. La loi conjointe π décrivant le tirage du profil P est supposée résulter de K tirages uniformes indépendants i.e. on procède à K tirages indépendants où p_k est tiré uniformément dans $[0,1]$. On notera IAC^* ce modèle aléatoire. Dans le cas où le vecteur tiré est le vecteur $(p_1, ..., p_K)$ la mesure du pouvoir d'un électeur $i \in N_k$ est égale à :

[32] Ce paragraphe répond à une question qui nous a été posée par un arbitre de lecture.

[33] Avec un tel modèle, nous obtiendrions des corrélations entre les votes d'une autre nature que celles décrites par les différentes variantes IAC. Par exemple, les votes des grands électeurs seraient plus corrélés qu'ils ne le sont dans notre article. Ceci répond à une question soulevée par G. Demange lors de la conférence.

$$\left(\sum_{T\notin\mathcal{W}_k \text{ et } T\cup\{i\}\in\mathcal{W}_k} p_k^t(1-p_k)^{n_k-1-t}\right)\left(\sum_{T\subseteq\{1,\dots,K\}\setminus\{k\}:q-w_k\leq\sum_{j\in T}w_j<q}\prod_{j\in T}\pi_j\prod_{j\notin T}(1-\pi_j)\right)$$

où:

$$\pi_j \equiv \sum_{T\in\mathcal{W}_j} p_j^t(1-p_j)^{n_j-1-t}$$

La mesure moyenne du pouvoir d'un électeur $i \in N_k$ est donc égale à :

$$\left[\int_0^1\left(\sum_{T\notin\mathcal{W}_k \text{ et } T\cup\{i\}\in\mathcal{W}_k} p_k^t(1-p_k)^{n-1-t}\right)dp_k\right] \times \sum_{T\subseteq\{1,\dots,K\}\setminus\{k\}:q-w_k\leq\sum_{j\in T}w_j<q}\prod_{j\in T}\overline{\pi_j}\prod_{j\notin T}(1-\overline{\pi_j})$$

où:

$$\overline{\pi_j} \equiv \int_0^1\left(\sum_{T\in\mathcal{W}_j} p_j^t(1-p_j)^{n_j-1-t}\right)dp_j$$

ou de façon plus compacte:

$$\left[\int_0^1\left(\sum_{T\notin\mathcal{W}_k \text{ et } T\cup\{i\}\in\mathcal{W}_k} p_k^t(1-p_k)^{n-1-t}\right)dp_k\right] \times P\left(q-w_k \leq Y_k < q\right)$$

où Y_k est la variable aléatoire $\sum_{j\in\{1,\dots,K\}\setminus\{k\}} Z_j$ et Z_j est la variable aléatoire égale à w_j avec la probabilité $\overline{\pi_j}$ et 0 sinon. Dans le cas où le jeu $\mathcal{W}_k$ est le jeu à la majorité simple, $\overline{\pi_k} = \frac{1}{2}$ pour tout $k = 1, \dots, K$. Sous réserve que l'approximation de Penrose est valide, on déduit que la mesure du pouvoir d'un électeur $i \in N_k$ est voisine de:

$$\frac{w_k}{n_k}\sqrt{\frac{2}{\pi\sum_j w_j^2}}.$$

5.2 Appendice 2 : Un Nouveau Modèle Aléatoire pour les Districts avec Deux Classes d'Electeurs

On notera ici n_1 le nombre de petits électeurs dans l'arrondissement et $n_2 < n_1$ le nombre de grands électeurs de ce même arrondissement. Le nombre total d'électeurs est $n = n_1 + n_2$.

Notons x_1 le nombre de petits électeurs dans l'arrondissement votant à gauche et x_2 le nombre de grands électeurs de ce même arrondissement votant à gauche. On appelera type de l'électorat la statistique anonyme (x_1, x_2) : on notera qu'il y a (bien sûr) plusieurs profils de préférences individuelles générant le même type d'électorat. On notera $x = x_1 + x_2$. La loi conjointe π décrivant le tirage du profil P dans le district est supposée résulter de 2 tirages uniformes indépendants, i.e. on procède à 2 tirages indépendants où les probabilités de voter à gauche p_1 et p_2 sont tirées uniformément dans $[0, 1]$. Dans ce cas la probabilité d'une configuration particulière de type (x_1, x_2) est :

$$\frac{(x_1)!(n_1 - x_1)!}{(n_1 + 1)\, n_1!} \frac{(x_2)!(n_2 - x_2)!}{(n_2 + 1)\, n_2!}$$

On notera IAC_{**} ce modèle aléatoire. Ce modèle est différent du modèle attaché à décrire une corrélation parfaite. Dans ce cas, le vecteur aléatoire (p_1, p_2) suit une loi uniforme sur la diagonale du carré unité $[0, 1]^2$et la probabilité d'une configuration particulière de type (x_1, x_2) est :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 p^{x_1+x_2}(1-p)^{n_1+n_2-x_1-x_2} dp \\ = \quad & \frac{(x)!(n-x)!}{(n+1)\, n!} \end{aligned}$$

Plusieurs modèles hybrides peuvent être bien entendu envisagés. Par exemple, le modèle où le vecteur aléatoire (p_1, p_2) suit une loi uniforme sur le triangle supérieur du carré unité $[0, 1]^2$ décrit une corrélation forte à la hausse. Dans ce cas la probabilité d'une configuration particulière de type (x_1, x_2) est :

$$2 \int_0^1 \int_{p_1}^1 p_1^{x_1}(1-p_1)^{n_1-x_1} p_2^{x_2}(1-p_2)^{n_2-x_2} dp_1 dp_2$$

Dans le cas du modèle IAC_{**}, la probabilité π_1 pour un petit électeur d'être pivot dans son arrondissement est:

$$\sum_{x_1=\frac{n-1}{2}-n_2}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n_1 - 1}{x_1} \binom{n_2}{\frac{n-1}{2} - x_1} \left(\int_0^1 p_1^{x_1}(1-p_1)^{n_1-x_1-1} dp_1 \right) \left(\int_0^1 p_2^{\frac{n-1}{2}-x_1}(1-p_2)^{n_2-\left(\frac{n-1}{2}-x_1\right)} dp_2 \right)$$

En utilisant la formule:

$$\int_0^1 p^{t-1}(1-p)^{n-t} dp = \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}$$

on obtient après simplifications:

$$\pi_1 = \sum_{x_1=\frac{n-1}{2}-n_2}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n_1}\frac{1}{n_2+1} = \frac{1}{n_1}$$

La probabilité π_2 pour un grand électeur d'être pivot dans son arrondissement est:

$$\sum_{x_1=\frac{n-1}{2}-(n_2-1)}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n_1}{x_1}\binom{n_2-1}{\frac{n-1}{2}-x_1}\left(\int_0^1 p_1^{x_1}(1-p_1)^{n_1-x_1}dp_1\right)\left(\int_0^1 p_2^{\frac{n-1}{2}-x_1}(1-p_2)^{n_2-1-\left(\frac{n-1}{2}-x_1\right)}dp_2\right)$$

Après simplifications, on obtient:

$$\pi_2 = \sum_{x_1=\frac{n-1}{2}-(n_2-1)}^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n_1+1}\frac{1}{n_2} = \frac{1}{n_1+1}$$

Les probabilités d'être pivot sont donc presque similaires ; *elles évoluent comme l'inverse de taille de la sous-population la plus grande.*

5.3 Appendice 3 : Un Département Composé d'un Arrondissement

5.3.1 Le Résultat Electoral

Afin d'illustrer, dans le cas le plus simple qui soit, la nature des calculs combinatoires à conduire dans le cas de collèges emboîtés, considérons la cas d'un collège composé de $N = 4r+1$ électeurs, où r désigne un entier impair. Le collège des grands électeurs" est composé des r premiers électeurs de ce collège. Les électeurs dont le numéro va de $r+1$ à $4r+1$ seront appelés petits électeurs. Il y a $3r+1$ petits électeurs. Chaque collège élit un député. On suppose que les votes des électeurs sont indépendants et équidistribués: ils votent avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ pour le candidat de droite D ou le candidat de gauche G. Il y a donc quatre résultats électoraux possibles : (G,G), (D,D), (G,D) et (D,G) où la premiere lettre correspond au résultat du collège composé de tous les électeurs.

Quelle est la probabilité du premier scenario ? Notons qu'il se produit lorsque $i \geq \frac{r+1}{2}$ grands électeurs du grand collège votent à gauche et que $j \geq \frac{N+1}{2} - i = 2r+1-i$ petits électeurs votent à gauche. La probabilité de cet événement est donc égale à:

$$P_{GG}(r) = \frac{\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r}\sum_{j=2r+1-i}^{3r+1}\binom{r}{i}\binom{3r+1}{j}}{2^{4r+1}}$$

Dans le cas où $r = 1$, il y a 1 grand électeur et 4 petits électeurs. L'expression ci-dessus est égale à:

$$\frac{\binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4}}{2^5} = \frac{11}{32} > \frac{8}{32}$$

Les calculs numériques reportés ci-dessous montre qu'elle s'écarte de la valeur $\frac{1}{4}$ et suggère une convergence vers 0.3333. Nous revenons sur cette question dans l'appendice 7.

r	1	3	99	199	299
$P_{GG}(r)$	0.343 75	0.337 16	0.333 45	0.333 39	0.333 37

5.3.2 Probabilité d'être Pivot

Considérons maintenant le calcul de la probabilité d'être pivot dans plusieurs cas de figure. On considère tout d'abord le calcul de ces probabilités dans chacun des districts pris de façon isolée.

Pour un petit électeur, elle est égale à:

$$\frac{1}{2^{N-1}}\binom{N-1}{\frac{N-1}{2}} = \frac{1}{2^{N-1}}\frac{(N-1)!}{\left(\frac{N-1}{2}!\right)^2} = \frac{1}{2^{4r}}\frac{4r!}{(2r!)^2} \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi r}}$$

Pour un grand électeur, elle est égale à :

$$\frac{1}{2^{N-1}}\binom{N-1}{\frac{N-1}{2}} + \frac{1}{2^{r-1}}\binom{r-1}{\frac{r-1}{2}} - \frac{1}{2^{N-1}}\binom{r-1}{\frac{r-1}{2}}\binom{3r+1}{\frac{3r+1}{2}} \simeq \sqrt{\frac{1}{2\pi r}} + \sqrt{\frac{2}{\pi r}} - \frac{2}{3\pi r^2}$$

Lorsque $r \to \infty$, le ratio des deux quantités tend vers:

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

Supposons pour simplifier que la chambre ne comprend que ces deux élus, i.e. $K = 1$, et que le vote à gauche n'a lieu que si les deux élus votent à gauche i.e. à l'unanimité. Un petit électeur est pivot si l'autre élu est de gauche et si les électeurs de son groupe sont divisés en deux parts égales. Un grand électeur est pivot si le petit élu est de gauche et si les électeurs du grand collège sont divisés en deux parts égales ou si le grand élu est de gauche et si les électeurs du petit collège sont divisés en deux parts égales ou si dans les deux collèges les électeurs sont divisés en deux parts égales.

Considérons le point de vue d'un petit électeur. La probabilité d'être pivot est égale à:

$$\frac{\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r}\binom{r}{i}\binom{3r}{2r-i}}{2^{4r}}$$

On constate que ce calcul est identique au calcul naïf qui consiste à considérer une forme d'indépendance entre les élections dans les deux collèges. Dans ce cas la probabilité d'être pivot est égale à :

$$\frac{1}{2}\frac{\binom{4r}{2r}}{2^{4r}} = \frac{\binom{4r}{2r}}{2^{4r+1}}$$

Cette identité découle de la symétrie du calcul. En effet:

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r}\binom{r}{i}\binom{3r}{2r-i}}{2^{4r}} + \frac{\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\binom{r}{i}\binom{3r}{2r-i}}{2^{4r}} \\ = \quad & 2\frac{\sum_{i=\frac{r+1}{2}}^{r}\binom{r}{i}\binom{3r}{2r-i}}{2^{4r}} = \frac{\binom{4r}{2r}}{2^{4r}} \end{aligned}$$

5.3.3 Calculs sous l'Hypothèse IAC

L'hypothèse IAC présente l'avantage, dans un cas élémentaire comme celui que nous considérons dans cet appendice, de conduire à des formules analytiques exprimant les probabilités recherchées de manière simple et élégante. La difficulté réside dans la formulation de l'hypothèse IAC elle-même dans le contexte étudié, qui implique des groupes de votants distincts. Plusieurs approches sont envisageables ; la plus simple, celle que nous adopterons, consiste à définir une "configuration de vote" comme un vecteur (x_1, x_2), où x_1 désigne le nombre de petits électeurs votant à gauche et x_2 le nombre de grands électeurs votant à gauche, et à considérer que toutes les configurations possibles ont la même probabilité d'occurrence. On notera que cette façon de procéder coïncide avec le modèle IAC_{**} présenté dans l'Appendice 2 et utilisé dans la Section 3.

Dans la formulation adoptée, il y a $(r+1)(3r+2)$ configurations possibles puisque nous avons

$$0 \leq x_1 \leq 3r+1 \text{ et } 0 \leq x_2 \leq r \ .$$

Calculons la probabilité d'obtenir un résultat électoral de type (G,G). Un tel résultat survient si et seulement si l'on a

$$x_2 \geq \frac{r+1}{2} \quad \text{et} \quad x_1 + x_2 \geq 2r+1.$$

Il n'est pas difficile d'établir que le nombre de configurations vérifiant ces conditions s'exprime par le polynôme suivant :

$$\frac{7}{8}r^2 + \frac{3}{2}r + \frac{5}{8} = \frac{(r+1)(7r+5)}{8}.$$

Il en résulte que la probabilité du résultat électoral (G,G) est égale à :

$$\frac{7r+5}{8(3r+2)}\ .$$

Lorsque $r \to \infty$, cette probabilité tend donc vers :

$$\frac{7}{24} = \frac{1}{4} + \frac{1}{24}\ .$$

Considérons maintenant le rapport des pouvoirs des deux catégories d'électeurs. Supposons comme nous l'avons fait plus haut que la chambre ne comprend que les deux élus de chacun des collèges et que le vote à gauche exige l'unanimité de ces deux élus.

Adoptons le point de vue d'un petit électeur (x_1 désigne désormais le nombre de petits électeurs, autres que celui que l'on considère, qui votent à gauche ; le nombre total de configurations est alors de $(r+1)(3r+1)$). Ce petit électeur est décisif ssi $x_1 + x_2 = 2r$ (il est pivot dans son arrondissement) et $x_2 \geq \frac{r+1}{2}$ (les grands électeurs envoient un député de gauche à la chambre). Le nombre de configurations associées est $\frac{r+1}{2}$ et l'on en déduit aisément l'expression du pouvoir du petit électeur :

$$\frac{1}{2(3r+1)}.$$

Considérons ensuite le point de vue d'un grand électeur (x_2 désigne maintenant le nombre de grands électeurs de gauche, autres que celui que l'on considère). Il est décisif si et seulement si

$$(x_2 = \frac{r-1}{2} \text{ et } x_1 + x_2 \geq 2r+1) \text{ ou } (x_1 + x_2 = 2r \text{ et } x_2 \geq \frac{r-1}{2}).$$

Notons que dans le cas où $(x_1 + x_2 = 2r$ et $x_2 \geq \frac{r-1}{2})$, le grand électeur est décisif dans le collège d'arrondissement et peut aussi l'être dans le collège des grands électeurs (lorsque $x_2 = \frac{r-1}{2}$). Le nombre de configurations associées au premier cas est de $\frac{3r+1}{2}$. Il est de $\frac{r+1}{2}$ dans le second cas. On en déduit que le pouvoir d'un grand électeur est égal à :

$$\frac{2r+1}{r(3r+2)}.$$

Le rapport des pouvoirs est donc donné par :

$$\frac{2(2r+1)(3r+1)}{r(3r+2)}.$$

Lorsque $r \to \infty$, ce rapport tend ainsi vers 4.

On notera que le modèle approximatif présenté dans la Section 3 donne aussi un rapport des pouvoirs égal à 4 (formule (4) avec $D = A = 1$ et $\mu = 1/4$). Autrement dit, dans le cas de figure considéré, l'hypothèse du "dédoublement" n'a pas d'incidence sur le rapport des pouvoirs lorsque le nombre d'électeurs est élevé sous l'hypothèse IAC_{**} .

On peut vérifier analytiquement la conclusion qui précède : dans le cas étudié et sous l'hypothèse IAC_{**}, le "dédoublement" est sans effet sur le rapport des pouvoirs des deux types d'électeurs. Introduisons pour cela une variable supplémentaire, x_3, désignant le nombre de grands électeurs votant à gauche dans l'élection du député de département, avec $0 \leq x_3 \leq r$ (x_2 désigne maintenant le nombre de grands électeurs votant à gauche dans l'élection du député d'arrondissement). Le petit électeur est pivot si et seulement si $x_1 + x_2 = 2r$ et $x_3 \geq (r+1)/2$. La probabilité associée est donc :

$$\frac{(r+1)(\frac{r+1}{2})}{(3r+1)(r+1)^2} = \frac{1}{2(3r+1)},$$

soit un résultat identique à celui que l'on a obtenu sous l'hypothèse d'un vote identique des grands électeurs dans l'élection d'arrondissement et dans celle du département.

Un grand électeur est pivot ssi ($x_1 + x_2 = 2r$ et $x_3 \geq (r-1)/2$) ou ($x_1 + x_2 \geq 2r+1$ et $x_3 = (r-1)/2$). On obtient après calcul une probabilité égale à

$$\frac{2r+1}{r(3r+2)},$$

ce qui est conforme, là encore, à ce que l'on avait obtenu sans l'hypothèse de dédoublement.

Par ailleurs, sous l'hypothèse IAC, un calcul naïf du pouvoir du petit électeur donne, comme sous l'hypothèse IC, le bon résultat. Il est en effet facile de voir que la probabilité que le petit électeur soit décisif dans l'élection du député d'arrondissement est égale à

$$\frac{r+1}{(r+1)(3r+1)} = \frac{1}{3r+1}$$

et la probabilité d'être pivot est donc, en supposant l'indépendance :

$$\frac{1}{2(3r+1)}.$$

Considérons, de la même façon, le calcul (naïf) du pouvoir d'un grand électeur. Le nombre de configurations dans lesquelles le grand électeur est pivot dans l'élection du député d'arrondissement est égal à r (puiqu'il faut alors $x_1 + x_2 = 2r$, avec $0 \leq x_1 \leq 3r+1$ et $0 \leq x_2 \leq r-1$). La probabilité d'être pivot dans l'arrondissement est donc de

$$\frac{r}{r(3r+2)} = \frac{1}{3r+2}.$$

La probabilité d'être pivot dans l'élection du député de département est quant à elle égale à

$$\frac{3r+2}{r(3r+2)} = \frac{1}{r},$$

puisqu'il faut dans ce cas $x_2 = (r-1)/2$, avec $0 \leq x_1 \leq 3r+1$. Si l'on suppose l'indépendance entre les deux élections, le pouvoir du grand électeur peut alors être obtenu grâce au calcul suivant :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3r+2} + \frac{1}{r}\right) = \frac{2r+1}{r(3r+2)}.$$

5.4 Appendice 4: Un Département composé de 2 Arrondissements avec une Légère Asymétrie

5.4.1 Le Résultat Electoral

Cette fois on considère le cas d'un district (département) composé de $N = 8r + 2$ électeurs, où r désigne un entier impair, divisé en 2 collèges d'arrondissement comprenant chacun $4r + 1$ électeurs. Le collège des grands électeurs (collège de département) comprend $2r + 1$ électeurs; il est composé des r premiers électeurs du premier collège d'arrondissement et des $r + 1$ premiers du second. Chaque collège d'arrondissement élit un député. Le collège de département élit également un député. On suppose comme précédemment que les votes des électeurs sont indépendants et équidistribués : ils votent avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ pour la candidat de droite D ou le candidat de gauche G. Il y a donc cette fois huit résultats électoraux possibles : (G,G;G), (G,D;G), (D,G;G) et (D,D;G), (G,G;D), (G,D;D), (D,G;D), (D,D;D) où les deux premières lettre correspondent aux résultats des deux collèges d'arrondissement et la dernière au résultat du collège de département. Dans chaque district l, il y a donc trois votes. Le résultat final est décrit par la réalisation du vecteur aléatoire (X_l^1, X_l^2, X_l^3) où X_l^3 désigne le résultat du vote dans le collège de département. Les trois variables aléatoires ne sont pas indépendantes et l'étude des covariances n'est pas immédiate. Par exemple la probabilité P_{13} que conjointement $X_r^1 = G$ et $X_r^3 = G$ est donnée par l'expression:

$$\frac{\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=r+1-i}^{r+1} \sum_{k=2r+1-i}^{3r+1} \binom{r}{i}\binom{r+1}{j}\binom{3r+1}{k}}{2^{5r+2}}$$

Il serait intéressant de voir de combien cette valeur s'écarte de la valeur $\frac{1}{4}$. Il serait également utile de calculer les probabilités d'être pivot des grands et des petits électeurs en notant K le nombre de départements. On peut voir la chambre comme comprenant $3K$ députés ayant tous un vote. Nous nous limiterons ici à quelques indications numériques dans le cas où $r = 3$. Le numérateur de l'expression ci-dessus est la somme des quatre termes suivants:

$$\left[\left(\sum_{k=7}^{10}\binom{10}{k}\right)\right] = 176$$

$$3\left[\left(\sum_{k=6}^{10}\binom{10}{k}\right) \times \left(\sum_{j=3}^{4}\binom{4}{j}\right)\right] = 5790$$

$$3\left[\left(\sum_{k=5}^{10}\binom{10}{k}\right) \times \left(\sum_{j=2}^{4}\binom{4}{j}\right)\right] = 21054$$

$$\left(\sum_{k=4}^{10}\binom{10}{k}\right) \times \left[\left(\sum_{j=1}^{4}\binom{4}{j}\right)\right] = 12720$$

On obtient donc que :

$$P_{13} = \frac{176 + 5790 + 21054 + 12720}{2^{17}} = 0.303\,19$$

De facon analogue, la probabilité P_{23} que conjointement $X_l^2 = G$ et $X_l^3 = G$ est donnée par l'expression:

$$\frac{\sum_{i=1}^{r+1}\sum_{j=r+1-i}^{r}\sum_{k=2r+1-i}^{3r}\binom{r+1}{i}\binom{r}{j}\binom{3r}{k}}{2^{5r+1}}$$

Dans le cas où $r = 3$, le numérateur de l'expression ci-dessus est la somme des quatre termes suivants:

$$4\left[\left(\sum_{k=6}^{9}\binom{9}{k}\right)\right] = 520$$

$$\binom{4}{2}\left[\left(\sum_{k=5}^{9}\binom{9}{k}\right) \times \left(\sum_{j=2}^{3}\binom{3}{j}\right)\right] = 6144$$

$$\binom{4}{3}\left[\left(\sum_{k=4}^{9}\binom{9}{k}\right)\times\left(\sum_{j=1}^{3}\binom{3}{j}\right)\right] = 10696$$

$$\left(\sum_{k=3}^{9}\binom{9}{k}\right)\times\left[\left(\sum_{j=0}^{3}\binom{3}{j}\right)\right] = 3728$$

On obtient donc que :

$$P_{23} = \frac{520 + 6144 + 10696 + 3728}{2^{16}} = 0.32178$$

Par ailleurs:

$$P_{12} = \frac{1}{4}$$

Nous revenons sur l'évolution de ces covariances quand r tend vers l'infini dans l'Appendice 7.

5.4.2 Calculs sous l'Hypothèse IAC.

La version du modèle IAC considérée ici est à nouveau IAC_{**}. On désigne par x_{11} (respectivement x_{21}) le nombre de petits électeurs du premier (deuxième) arrondissement qui votent à gauche et par x_{12} (respectivement x_{22}) le nombre de grands électeurs du premier (deuxième) arrondissement qui votent à gauche, avec :

$$0 \le x_{11} \le 3r+1, \qquad 0 \le x_{12} \le r, \qquad 0 \le x_{21} \le 3r, \qquad 0 \le x_{22} \le r+1.$$

Intéressons-nous tout d'abord aux résultats électoraux possibles. Dans la mesure où les collèges ne sont pas disjoints, les huit résultats possibles n'ont pas tous la même probabilité d'occurrence. Calculons la probabilité du résultat (G,G;G). Un tel résultat survient si l'on a :

$$(x_{11} + x_{12} \ge 2r+1,\ x_{21} + x_{22} \ge 2r+1 \text{ et } x_{12} + x_{22} \ge r+1.$$

Le nombre de configurations associées est égal à :

$$\frac{11}{8}r^4 + \frac{23}{4}r^3 + \frac{65}{8}r^2 + \frac{19}{4}r + 1 = \frac{(r+1)(r+2)(11r^2+13r+4)}{8}.$$

On en déduit que la probabilité du résultat (G,G;G) est donnée par

$$\frac{11r^2 + 13r + 4}{8(3r + 1)(3r + 2)}.$$

Lorsque r tend vers l'infini, la probabilité de ce résultat tend vers 11/72 et diffère donc de 1/8.

Supposons r grand afin de pouvoir négliger la légère asymétrie qui caractérise la situation étudiée. On peut observer que les résultats pour lesquels les deux élections d'arrondissement donnent un député de doite et un député de gauche ont une probabilité égale à 1/8. Des arguments de symétrie permettent alors d'obtenir les probabilités limites (i.e. obtenues pour r tendant vers l'infini) de chacun des huit résultats possibles :

Résultats possibles	G,G;G	G,D;G	D,G;G	D,D;G	G,G;D	G,D;D	D,G;D	DDD
Probabilité limite	11/72	1/8	1/8	7/72	7/72	1/8	1/8	11/72

Considérons maintenant le rapport des pouvoirs dans le cas où $K = 1$. Un petit électeur de l'arrondissement 1 est pivot s'il est pivot dans son arrondissement ($x_{11} + x_{12} = 2r$) et si les députés élus par l'autre arrondissement et par le département ne sont pas du même bord (($x_{21} + x_{22} \geq 2r + 1$ et $x_{12} + x_{22} \leq r$) ou ($x_{21} + x_{22} \leq 2r$ et $x_{12} + x_{22} \geq r + 1$)). Dans ce calcul, x_{11} désigne désormais le nombre de petits électeurs du premier arrondissement, autres que celui que l'on considère, qui votent à gauche. Donc: $0 \leq x_{11} \leq 3r$. En calculant le nombre de configurations associées puis en divisant par le nombre total de configurations possibles, nous obtenons le pouvoir du petit électeur :

$$\frac{4r}{3(3r + 1)^2}.$$

Pour calculer le pouvoir d'un grand électeur (supposé issu de l'arrondissement 1), trois cas doivent être considérés. Dans ce qui suit, x_{12} désigne désormais le nombre de grands électeurs du premier arrondissement, autres que celui que l'on considère, qui votent à gauche; donc $0 \leq x_{12} \leq r - 1$.

Cas 1 : le grand électeur est pivot dans son arrondissement (mais pas dans le département), le deuxième arrondissement vote à gauche (respectivement à droite) et le département à droite (à gauche). Autrement dit :

$$x_{11} + x_{12} = 2r \text{ et } ((\ x_{21} + x_{22} \geq 2r + 1 \text{ et } x_{12} + x_{22} \leq r - 1) \text{ ou } (x_{21} + x_{22} \leq 2r \text{ et } x_{12} + x_{22} \geq r + 1)).$$

Le nombre de configurations de ce type est égal à :

$$\frac{r(r+1)(4r-1)}{3}.$$

Cas 2 : le grand électeur est pivot dans l'élection du député de département (mais pas dans son arrondissement), l'arrondissement 1 vote à gauche (droite) et l'arrondissement 2 vote à droite (gauche), soit :

$$x_{12}+x_{22}=r \text{ et } ((\ x_{11}+x_{12}\geq 2r+1 \text{ et } x_{21}+x_{22}\leq 2r) \text{ ou } (x_{11}+x_{12}\leq 2r-1 \text{ et } x_{21}+x_{22}\geq 2r+1)).$$

Le nombre de configurations associées est :

$$\frac{r(2r+1)(7r+1)}{3}$$

Cas 3 : le grand électeur est pivot dans son arrondissement et au département, i.e. :

$$x_{11}+x_{12}=2r \text{ et } x_{12}+x_{22}=r,$$

ce qui correspond à $r(3r+1)$ configurations.

Nous obtenons ainsi un total de $r(r+1)(6r+1)$ configurations dans lesquelles le grand électeur est pivot. On en déduit que son pouvoir de vote est égal

$$\frac{r(r+1)(6r+1)}{(3r+2)(3r+1)(r+2)r}$$

et le rapport des pouvoirs est donné par

$$\frac{3(r+1)(3r+1)(6r+1)}{4r(r+2)(3r+2)}.$$

Lorsque r tend vers l'infini, ce rapport tend vers $9/2=4.5$. On peut noter que ce résultat est nettement différent de celui qui est obtenu en appliquant la formule théorique, qui donne 2.5 pour $D=1$, $A=2$ et $\mu=1/4$. L'hypothèse de "dédoublement" (qui fonde cette formule théorique) tend donc, dans le cas considéré, à réduire de manière importante le rapport des pouvoirs entre les deux catégories d'électeurs. Nous commencons par vérifier dans le cas de ce contexte puis nous dérivons la formule exacte $IAC**$ dans le cas où $K=D=1$.

Pour cela, nous supposons que x_{12} et x_{22} désignent désormais les grands électeurs qui votent à gauche dans l'arrondissement 1 et dans l'arrondissement 2 (respectivement) et nous introduisons deux variables supplémentaires x_{13} et x_{23} qui désignent (respectivement) le nombre de grands électeurs de l'arrondissement 1 qui votent à gauche au département et le nombre de grands électeurs de l'arrondissement 2 qui votent à gauche au département, avec $0 \leq x_{13} \leq r$ et $0 \leq x_{23} \leq r+1$. Le nombre de configurations possibles est maintrenant plus élevé (de l'ordre de $9r^6$) et pour obtenir les probabilités d'être pivot pour chaque catégorie d'électeurs, il faut reprendre les systèmes d'équations et d'inéquations précédents en remplaçant, à chaque fois qu'elle intervient, la somme $x_{12} + x_{22}$ par $x_{13} + x_{23}$. Sauf erreur de notre part, nous obtenons que la probabilité d'être pivot pour un petit électeur est désormais égale à

$$\frac{1}{2(3r+1)}$$

et celle d'un grand électeur s'écrit

$$\frac{2(r+1)}{(r+2)(3r+2)},$$

ce qui donne un rapport des pouvoirs entre les deux catégories égal à

$$\frac{4(r+1)(3r+1)}{(r+2)(3r+2)}.$$

Ainsi, la limite du rapport lorsque r tend vers l'infini est désormais égale à 4 ; elle a donc diminué mais reste éloignée de la prédiction de la formule théorique.

Une autre approche possible, plus simple, pour prendre en compte l'indépendance des votes des grands électeurs selon qu'ils élisent leur député d'arrondissement ou le député de département consiste à n'introduire qu'une variable supplémentaire, x_3, qui désigne le nombre de grands électeurs qui votent à gauche dans l'élection du collège départemental (avec $0 \leq x_3 \leq 2r+1$). On suppose alors, implicitement, que le vote des grands électeurs au collège de département ne dépend pas de leur appartenance à un arrondissement donné. Nous obtenons un rapport des pouvoirs qui est le suivant :

$$\frac{\frac{5r+3}{2(2r+1)(3r+2)}}{\frac{1}{2(3r+1)}} = \frac{(3r+1)(5r+3)}{(2r+1)(3r+2)}.$$

Lorsque r tend vers l'infini, le rapport est maintenant égal à $5/2$, soit exactement ce que l'on obtient avec la formule théorique $1 + \frac{1-\mu}{A\mu}$

Nous concluons cet appendice en expliquant l'origine de l'importance différence avec le cas où les grands électeurs votent de façon identique dans leurs grands collèges. La formule "exacte" est en réalité:

$$1 + \frac{1-\mu}{A\mu}\frac{\overline{\theta}}{\underline{\theta}}c_A$$

où le coefficient c_A est introduit et étudié dans le cas où A est impair (voir table ci-dessous) dans Le Breton-Lepelley et Smaoui (2011), $\overline{\theta}$ est la probabilité pour que député de département soit pivot dans l'assemblée de $A+1$ députés, et $\underline{\theta}$ est la probabilité pour qu'un député d'arrondissement soit pivot dans l'assemblée.

A	3	5	7	9	11	13	15	17	...
c_A	2.25	2.995	3.577	4.076	4.521	4.925	5.298	5.647	...

On pourrait introduire c_A aussi pour des valeurs paires de A modulo une légère asymétrie entre les arrondissements. On obtiendrait $c_A = 2$. Dans le cas où $A = 2$ (et $\mu = \frac{1}{4}$), on déduit du tableau précédent: $\overline{\theta} = \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$ et $\underline{\theta} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$. En utilisant la formule ci-dessus, on obtient un rapport des pouvoirs égal à:

$$1 + \frac{3}{2} \times 2 \times \frac{9}{8} \simeq 4.375$$

Pourquoi trouve t'on 4.375 au lieu de 4.5 ? La raison tient au fait que la formule ignore le conditionnement. En réalité, la probabilité que que le député de département soit pivot dans l'assemblée *sachant que le vote est equilibré dans le collège de département* n'est pas $\frac{4}{8}$ mais $\frac{14}{27} = 0.518\,52$. La valeur dérive facilement du calcul effectué dans le cas 2 ci-dessus. Dans la formule de rapport des pouvoirs on doit donc remplacer $\overline{\theta} = \frac{4}{8}$ par $\overline{\theta} = \frac{14}{27}$. On obtient le rapport:

$$1 + \frac{3}{2} \times 2 \times \frac{\frac{14}{27}}{\frac{4}{9}} = 4.5$$

Ce calcul est instructif car il montre que l'évènement être pivot dans un collège peut vraiment être informatif sur un autre évènement.

5.5 Appendice 5 : Un Département Composé de Trois Arrondissements

5.5.1 Le résultat Electoral

Cette fois on considère le cas d'un district (département) composé de $N = 12r + 3$ électeurs, où r désigne un entier impair, divisé en 3 collèges d'arrondissement comprenant chacun $4r+1$ électeurs. Le collège des grands électeurs (collège de département) comprend $3r$ électeurs; il est composé des r premiers électeurs de chaque collège d'arrondissement. Chaque collège d'arrondissement élit un député. Le collège de département élit 2 députés au scrutin de liste sans panachage. On suppose comme précédemment que les votes des électeurs sont indépendants et équidistribués : ils votent avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ pour la candidat de droite D ou le candidat de gauche G. Il y a donc cette fois huit (16 si l'on regarde collège par collège) résultats électoraux possibles : (3G;G), (2G,D;G), (G,2D;G) et (3D;G), (3G;D), (2G,D;D), (1G,2D;D), (3D;D) où les deux premières lettre correspondent aux résultats des collèges d'arrondissement. Dans chaque district l, il y a quatre votes. Le résultat final est décrit par la réalisation du vecteur aléatoire $(X_l^1, X_l^2, X_l^3, X_l^4)$ où X_l^4 désigne le résultat du vote dans le collège de département. Par exemple, la probabilité que conjointement $X_l^1 = G$ et $X_l^4 = G$ est donnée par l'expression:

$$P_{GG}(r) = \frac{\sum_{i=0}^{r} \sum_{j=Max(0,\frac{r-1}{2}-i)}^{r} \sum_{k=Max(0,\frac{3r+1}{2}-i-j)}^{r} \sum_{l=2r+1-i}^{3r+1} \binom{r}{i}\binom{r}{j}\binom{r}{k}\binom{3r+1}{l}}{2^{6r+1}}$$

Il serait intéressant de voir de combien cette valeur s'écarte de la valeur $\frac{1}{4}$. Il serait également utile de calculer les probabilités d'être pivot des grands et des petits électeurs en notant K le nombre de districts. Nous nous limiterons ici à quelques indications numériques dans le cas où $r = 3$. Le numérateur de l'expression ci-dessus est la somme des quatre termes suivants:

$$\left[\left(\sum_{l=7}^{10}\binom{10}{l}\right) \times \left(\sum_{j=2}^{3}\sum_{k=5-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}\right)\right] = 1232$$

$$3\left[\left(\sum_{l=6}^{10}\binom{10}{l}\right) \times \left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=4-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}\right)\right] = 66\left(\sum_{l=6}^{10}\binom{10}{l}\right) = 25476$$

$$3\left[\left(\sum_{l=5}^{10}\binom{10}{l}\right) \times \left(\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=3-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}\right)\right] = 126\left(\sum_{l=5}^{10}\binom{10}{l}\right) = 80388$$

$$\left[\left(\sum_{l=4}^{10}\binom{10}{l}\right) \times \left[\left(\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=2-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k} + \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\right)\right]\right] = 57\left(\sum_{l=4}^{10}\binom{10}{l}\right) = 48336$$

On en déduit que la probabilité $P_{GG}(r)$ vaut $\frac{1232+25476+80388+48336}{2^{19}} = 0.296\,46$ qui diffère significativement de $\frac{1}{4} = 0.25$. On peut regarder ce déplacement du vote à gauche dans le petit collège sous un autre angle.

Sachant que l'on vote à gauche dans le grand collège, la probabilité qu'aucun des 3 grands électeurs du petit collège de 13 électeurs ne vote à gauche n'est plus égale à $\frac{1}{8}$. Elle vaut exactement :

$$\frac{\sum_{j=2}^{3}\sum_{k=5-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}}{\sum_{k=5}^{9}\binom{9}{k}} = \frac{7}{256} = 2.\,734\,4 \times 10^{-2}$$

qui diffère de $\frac{1}{8} = 0.125$. La probabilité qu'un grand électeur seulement vote à gauche vaut :

$$\frac{\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=4-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}}{\sum_{k=5}^{9}\binom{9}{k}} = \frac{66}{256} = 0.257\,81$$

qui diffère de $\frac{3}{8} = 0.375$. La probabilité que deux grands électeurs exactement votent à gauche vaut :

$$\frac{\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=3-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}}{\sum_{k=5}^{9}\binom{9}{k}} = \frac{126}{256} = 0.492\,19$$

qui diffère aussi de $\frac{3}{8}$. Finalement, la probabilité que les 3 grands électeurs votent à gauche vaut :

$$\frac{\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=2-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k} + \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}}{\sum_{k=5}^{9}\binom{9}{k}} = \frac{57}{256} = 0.222\,66$$

qui diffère de $\frac{1}{8}$. On constate que conditionnellement à l'événement “le Collège des 9 grands électeurs vote majoritairement à gauche”, les probabilités qui étaient uniformes avant le conditionnement sont désormais biaisées en direction d'un vote plus à gauche. Le nombre *moyen* de grands électeurs de cet arrondissement qui votent à gauche passe de $\frac{3}{2} = 1.5$ à $\frac{66+252+171}{256} = 1.910\,2$.

Calculons maintenant la probabilité pour un petit électeur d'être pivot, sachant que le grand collège a voté majoritairement G. Cette probabilité vaut $2 \times \frac{Num}{2^{18}}$ où le numérateur Num est la somme des quatre termes suivants:

$$\sum_{j=2}^{3}\sum_{k=5-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}\binom{9}{6} = 588$$

$$3\left(\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=4-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}\binom{9}{5}\right) = 8316$$

$$3\left(\sum_{j=0}^{3}\sum_{k=3-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k}\binom{9}{4}\right) = 15876$$

$$\binom{9}{3} \times \left[\left(\sum_{j=0}^{2}\sum_{k=2-j}^{3}\binom{3}{j}\binom{3}{k} + \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\right)\right] = \binom{9}{3} \times 57 = 4788$$

La probabilité d'être pivot vaut donc: $\frac{Num}{2^{18}} \times 2 = \frac{29568}{2^{17}} = 0.225\,59$ ce qui qui coïncide (sans surprise) avec $\frac{\binom{12}{6}}{2^{12}}$ c'est-à-dire avec le calcul non conditionnel.

5.5.2 Calculs sous l'Hypothèse IAC

Analysons maintenant le rapport des pouvoirs à la lumière de l'hypothèse IAC qui, nous l'avons vu, est susceptible de rendre les calculs plus aisés. Nous présentons ici encore l'approche associée à la version IAC_{**}, la plus simple du point de vue calculatoire. Elle consiste à définir une configuration comme un vecteur $(x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32})$, x_{i1} désignant le nombre de petits électeurs de gauche dans l'arrondissement i et x_{i2} le nombre de grands électeurs de gauche dans l'arrondissement i, $i = 1, 2, 3$.

Adoptons le point de vue d'un petit électeur, que nous supposerons sans perte de généralité issu de l'arrondissement 1. L'ensemble des configurations possibles est défini par :

$$0 \leq x_{i2} \leq r \text{ pour } i = 1, 2, 3, \quad 0 \leq x_{11} \leq 3r \quad \text{et} \quad 0 \leq x_{i1} \leq 3r + 1 \text{ pour } i = 2, 3.$$

Le nombre de ces configurations s'exprime donc en fonction de r de la manière suivante :

$$(r + 1)^3(3r + 1)(3r + 2)^2.$$

Le petit électeur considéré est décisif s'il est pivot dans son arrondissement (ce qui implique $x_{11} + x_{12} = 2r$) et si la chambre comporte 2 députés de droite et 2 députés de gauche ; tel sera le cas si le collège de département vote à gauche (respectivement à droite) et les collèges d'arrondissement 2 et 3 à droite (à gauche). Autrement dit, nous devons avoir :

$$x_{11} + x_{12} = 2r,\ x_{21} + x_{22} \geq 2r + 1,\ x_{31} + x_{32} \geq 2r + 1 \text{ et } x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq \frac{3r - 1}{2};$$

ou

$$x_{11} + x_{12} = 2r,\ x_{21} + x_{22} \leq 2r,\ x_{31} + x_{32} \leq 2r \text{ et } x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq \frac{3r + 1}{2}.$$

Après évaluation et addition du cardinal de chacun de ces deux sous-ensembles, nous obtenons :

$$\frac{(r + 1)^2(3r + 2)(59r^2 + 94r + 39)}{96}.$$

Il en résulte que le pouvoir du petit électeur s'écrit :

$$\frac{59r^2 + 94r + 39}{96(r + 1)(3r + 1)(3r + 2)}.$$

Considérons ensuite le cas d'un grand électeur, supposé issu de l'arrondissement 1. Une fois écarté cet électeur, nous avons $0 \leq x_{12} \leq r - 1$ et le nombre total de configurations possibles est légèrement différent de ce qu'il était lorsque l'on adoptait le point de vue du petit électeur, puisqu'il est égal à :

$$r(r + 1)^2(3r + 2)^3.$$

Pour évaluer le nombre de configurations dans lesquelles le grand électeur est décisif, nous distinguerons trois cas.

Cas 1 : Le grand électeur est pivot dans le collège départemental (et dans ce collège seulement) et les collèges d'arrondissement envoient 1 ou 2 députés de gauche à la chambre. Ce sera le cas ssi :

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=\frac{3r-1}{2} \text{ et } [(x_{11}+x_{12}\geq 2r+1,\ x_{21}+x_{22}\leq 2r \text{ et } x_{31}+x_{32}\leq 2r) \text{ ou }$$
$$(x_{11}+x_{12}<2r,\ x_{21}+x_{22}\geq 2r+1 \text{ et } x_{31}+x_{32}\leq 2r) \text{ ou } (x_{11}+x_{12}<2r,\ x_{21}+x_{22}\leq 2r$$
$$\text{et } x_{31}+x_{32}\geq 2r+1)]$$

ou

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=\frac{3r-1}{2} \text{ et } [(x_{11}+x_{12}\geq 2r+1,\ x_{21}+x_{22}\geq 2r+1 \text{ et } x_{31}+x_{32}\leq 2r) \text{ ou }$$
$$(x_{11}+x_{12}<2r,\ x_{21}+x_{22}\geq 2r+1 \text{ et } x_{31}+x_{32}\geq 2r+1) \text{ ou } (x_{11}+x_{12}\geq 2r+1,\ x_{21}+x_{22}\leq 2r$$
$$\text{et } x_{31}+x_{32}\geq 2r+1)].$$

Après calcul, il apparaît que le nombre total de configurations associées au cas 1 est donné par :

$$\frac{(r+1)(987r^4+1963r^3+1395r^2+413r+42)}{64}$$

Cas 2 : Le grand électeur est pivot dans son collège d'arrondissement (et dans ce collège seulement) et le collège départemental vote à gauche (respectivement, à droite) et les collèges des arrondissements 2 et 3 à droite (à gauche). Il faut donc :

$$x_{11}+x_{12}=2r,\ x_{12}+x_{22}+x_{32}\geq\frac{3r+1}{2},\ x_{21}+x_{22}\leq 2r,\ x_{31}+x_{32}\leq 2r$$

ou

$$x_{11}+x_{12}=2r,\ x_{12}+x_{22}+x_{32}<\frac{3r-1}{2},\ x_{21}+x_{22}\geq 2r+1,\ x_{31}+x_{32}\geq 2r+1.$$

Le nombre de configurations correspondant s'écrit :

$$\frac{(r+1)(3r+1)(118r^3+111r^2-10r-27)}{192}.$$

Cas 3 : Le grand électeur est pivot dans le collège départemental et dans son collège d'arrondissement, i.e.

$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=\frac{3r-1}{2} \quad \text{et} \quad x_{11}+x_{12}=2r.$$

Le nombre de configurations associées est égal à :

$$\frac{(r+1)(3r+1)(3r+2)^2}{4}.$$

En sommant ces trois types de configurations et en divisant par le nombre total de configurations, nous obtenons le pouvoir de vote du grand électeur :

$$\frac{3315r^4+7636r^3+6426r^2+2300r+291}{192r(r+1)(3r+2)^3}.$$

Le rapport des pouvoirs est alors donné par l'expression suivante :

$$\frac{(3r+1)(3315r^4+7636r^3+6426r^2+2300r+291)}{2r(3r+2)^2(59r^2+94r+39)}.$$

Lorsque $r \to \infty$, ce rapport tend vers $\frac{1105}{118}$. Autrement dit, dans la situation considérée, le pouvoir d'un grand électeur est plus de 9 fois supérieur à celui d'un petit électeur et est voisin du résultat de 9.13 dérivé par Vidu (2011) à l'aide de simulations ! Ce résultat est nettement différent de celui que l'on obtient avec le modèle approximatif de la Section 3 (formule (4)), qui donne pour $A = 3$, $D = 2$ et $\mu = 1/4$ un rapport des pouvoirs de 3. Cet écart important peut provenir du nombre très réduit de députés ici égal à 5 dans le cas étudié : les pouvoirs des députés sont alors différents de leurs poids, contrairement à ce que l'on a supposé dans notre modèle approximatif. Mais l'écart peut aussi résulter de l'impact de l'hypothèse de "dédoublement" des grands électeurs, sur laquelle est fondé l'ensemble de nos formules. Afin d'éclairer cette question, nous avons calculé le rapport des pouvoirs en prenant en compte explicitement cette hypothèse. Il faut, pour y parvenir, introduire une variable supplémentaire, indépendante de x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} et désignant le nombre de grands électeurs votant à gauche dans le département ; soit x_{42} cette variable. Il suffit alors de reprendre l'analyse qui précède en remplaçant $x_{12} + x_{22} + x_{32}$ par x_{42} pour obtenir un vote non corrélé des grands électeurs. En procédant de cette manière, nous obtenons un rapport des pouvoirs dont l'expression est nettement plus simple :

$$\frac{2(2r+1)(3r+1)}{r(3r+2)}.$$

Lorsque r tend vers l'infini, ce rapport tend vers $\frac{12}{3} = 4$. Le résultat n'est maintenant plus très éloigné de celui que donne notre formule. En fait, on retrouve la formule exacte car le programme ipdirect de Warwick délivre un rapport de pouvoir de 3 et non de 2 comme nous l'avons supposé dans la formule théorique. Il reste cependant un écart conséquent avec le cas où les votes sont corrélés qui nous conduit à conclure que la prise en compte de la dépendance des votes des grands électeurs joue, dans ce cas particulier, un rôle considérable.

5.6 Appendice 6 : Probabilité d'être Pivot et Conditionnement

Dans cet appendice, nous exposons quelques réflexions simples sur la sensibilité du calcul de la probabilité d'être pivot dans un collège à des informations sur les élections dans un ou plusieurs autres collèges. De manière générale considérons un collège k (arrondissement ou département) et un électeur i de ce collège. Sachant qu'un autre collège (disons le collège l) ayant une intersection non vide avec le collège k a voté à gauche (ou à droite), que peut-on dire de la probabilité de l'événement E_{ik} : "l'électeur i est pivot dans le vote du collège k" sachant l'événement V_{lG} : "le collège l a voté à gauche" ou l'événement V_{lD} : "le collège l a voté à droite". On part de la formule évidente:

$$Prob\,(E_{ik}) = Prob\,(E_{ik} \cap V_{lG}) + Prob\,(E_{ik} \cap V_{lD})$$

Sachant que la gauche et la droite sont traitées symétriquement dans les modèles aléatoires considérés (IC et IAC), on a:

$$Prob\,(E_{ik} \cap V_{lG}) = Prob\,(E_{ik} \cap V_{lD})$$

et

$$Prob\,(V_{lG}) = Prob\,(V_{lD}) = \frac{1}{2}$$

Et donc:

$$Prob\,(E_{ik} \mid V_{lG}) = Prob\,(E_{ik} \mid V_{lD}) = 2Prob\,(E_{ik} \cap V_{lG})$$

Ce qui entraîne:

$$Prob\,(E_{ik}) = Prob\,(E_{ik} \mid V_{lG}) = Prob\,(E_{ik} \mid V_{lD})$$

Les choses se compliquent si le conditionnement fait intervenir ici deux variables aléatoires, c'est-à-dire ici deux collèges l et k. On a maintenant quatre événements V_{GG}, V_{GD}, V_{DG} et V_{DD}. On part à nouveau de la formule évidente :

$$Prob\,(E_{ik}) = Prob\,(E_{ik} \cap V_{GG}) + Prob\,(E_{ik} \cap V_{GD}) + Prob\,(E_{ik} \cap V_{DG}) + Prob\,(E_{ik} \cap V_{DD})$$

Les considérations de symétrie impliquent cette fois

$$\begin{aligned} Prob\,(E_{ik} \cap V_{GG}) &= Prob\,(E_{ik} \cap V_{DD}) \\ Prob\,(E_{ik} \cap V_{GD}) &= Prob\,(E_{ik} \cap V_{DG}) \end{aligned}$$

et donc:

$$Prob\left(E_{ik}\right) = 2\Pr ob\left(E_{ik} \cap V_{GG}\right) + 2\Pr ob\left(E_{ik} \cap V_{GD}\right)$$

mais on ne peut guère aller plus loin. En particulier, il ne semble pas possible d'affirmer en toute généralité que l'on peut ignorer le conditionnement.

5.7 Appendice 7 : Probabilités Gaussiennes d'Orthant

Dans cet appendice on propose une justification asymptotique des résulats trouvés dans les appendices 3, 4 et 5 sous l'hypothèse IC. On considère le cas général d'un département composé de A arrondissements de même taille $4r+1$ où A et r sont des entiers impairs. Le collège de département est composé des r premiers électeurs des arrondissements : les Ar électeurs de ce collège élisent D députés au scrutin de liste bloqué où D est un entier pair.

Pour chaque arrondissement $j = 1, ..., A$, on considère la variable aléatoire:

$$S_j^r = \sum_{i=1}^{4r+1} X_{ij}$$

où la variable aléatoire X_{ij} code le vote de l'électeur i du $j^{ième}$ arrondissement sous la forme

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si l'électeur } i \text{ a voté } G \\ 0 \text{ si l'électeur } i \text{ a voté } D \end{cases}$$

S_j^r désigne donc le nombre d'électeurs de l'arrondissement j qui ont voté à gauche. Par ailleurs, on note S_d^r la variable aléatoire:

$$S_d^r = \sum_{j=1}^{A} \sum_{i=1}^{r} X_{ij}$$

S_d^r désigne donc le nombre d'électeurs du collège de département qui ont voté à gauche. On considère enfin le vecteur aléatoire $S^r = (S_1^r, S_2^r, ..., S_A^r, S_d^r)$ de dimension $A+1$. Pour étudier le comportement de ce vecteur, considérons tout d'abord le vecteur $\widehat{S^r}$ de taille $2A$:

$$\widehat{S^r} = \left(\sum_{i=1}^{r} X_{i1}, \sum_{i=r+1}^{4r+1} X_{i1}, \sum_{i=1}^{r} X_{i2}, \sum_{i=r+1}^{4r+1} X_{i2}, ..., \sum_{i=1}^{r} X_{iA}, \sum_{i=r+1}^{4r+1} X_{iA} \right)$$

En vertu du théorème central limite, ce vecteur se comporte, lorsque r est suffisamment grand, comme un vecteur aléatoire gaussien multidimensionnel (de dimension $2A$) $N\left(\widehat{\mu}, \widehat{\Omega}\right)$ où:

$$\widehat{\mu}=\left(\frac{r}{2},\frac{3r+1}{2},...,\frac{r}{2},\frac{3r+1}{2}\right)$$

$$\widehat{\Omega}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{r}}{2} & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3r+1}}{2} & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & . & \frac{\sqrt{r}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & \frac{\sqrt{3r+1}}{2} \end{pmatrix}$$

On vérifie facilement que $S^r=\Delta\widehat{S^r}$ où Δ est la matrice $(A+1)\times 2A$ définie comme suit:

$$\Delta=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & . & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & . & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, S^r se comporte comme un vecteur gaussien $N(\mu,\Omega)$ où μ est un vecteur de dimension $A+1$ et Ω (la matrice de variances covariances) est une matrice carrée symétrique et définie positive de dimension $(A+1)\times(A+1)$. Il est immédiat de voir que:

$$\mu=\left(\frac{4r+1}{2},\frac{4r+1}{2},...,\frac{4r+1}{2},\frac{Ar}{2}\right)$$

S'agissant de Ω, il suffit de calculer la covariance entre disons (elles sont toutes identiques) S_1^r et S_d^r. On obtient:

$$Cov\left(S_1^r,S_d^r\right)=\sum_{i=1}^{r}\left(X_{i1}-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{r}{4}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned} Var\left(S_1^r\right) &= \frac{4r+1}{4} \\ Var\left(S_d^r\right) &= \frac{Ar}{4} \end{aligned}$$

En résumé, on obtient donc:

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{4r+1}}{2} & 0 & 0 & . & 0 & \frac{\sqrt{r}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{4r+1}}{2} & 0 & . & 0 & \frac{\sqrt{r}}{2} \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & . & \frac{\sqrt{4r+1}}{2} & \frac{\sqrt{r}}{2} \\ \frac{\sqrt{r}}{2} & \frac{\sqrt{r}}{2} & . & . & \frac{\sqrt{r}}{2} & \frac{\sqrt{Ar}}{2} \end{pmatrix}$$

On constate que la matrice est presque diagonale. Les covariances sont situées sur la dernière ligne et donc colonne. On constate que le coefficient de corrélation ρ sur cette dernière ligne est égal à:

$$\rho = \frac{\frac{r}{4}}{\frac{\sqrt{4r+1}}{2} \times \frac{\sqrt{Ar}}{2}} \simeq \frac{1}{2\sqrt{A}}$$

On pourrait après normalisation écrire la matrice sous la forme compacte:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 & \rho \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & \rho \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & . & 1 & \rho \\ \rho & \rho & . & . & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

En quoi cela est-il utile ? Principalement pour connaitre les probabilités des différents profils des votes dans chaque département. Ce profil est décrit par un vecteur de dimension $A+1$ où les A premières coordonnées décrivent les votes des collèges d'arrondissement et la dernière décrit le vote dans le collège de département.

Soit J un sous ensemble de $\{1, 2, ..., A\}$. Quelle est la probabilité P_{J+d} de l'événement "les collèges d'arrondissement dont le numéro est dans le sous-ensemble J ont voté à gauche et le collège de département a voté à gauche". En considérant le vecteur centré $\widetilde{S}^r = S^r - \mu$ on voit que:

$$P_{J+d} = Prob\left(\widetilde{S}^r > 0 \text{ pour tout } j \in J \text{ et } \widehat{S_d}^r > 0\right)$$

En considérant l'approximation gaussienne, il s'agit donc de calculer la probabilité qu'un vecteur aléatoire gaussien centré de matrice de variances-covariances Ω appartienne à un orthant (les coordonnées dans J et la dernière sont positives et les autres sont négatives).

Par exemple dans le cas où $A = 1$, on a un vecteur gaussien bivarié de matrice $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$. La probabilité que les deux collèges votent à gauche est la probabilité P de l'orthant $\mathbb{R}_+^2$.

Une importante littérature statistique est consacrée au calcul exact ou approché de ces probabilités (Divgi (1979), Gupta (1963a,b), Owen (1956), Plackett (1965), Wang (1987)). Considérons une gaussienne bivariée normalisée de matrice $\Omega = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire décrite par la densité :

$$f(x, y, \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{\left(x^2+y^2-2\rho xy\right)}{2(1-\rho^2)}}$$

La probabilité P s'exprime comme suit:

$$P = \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} f(x, y, \rho) dx dy$$

Stieltjes (Gupta (1963b) a démontré que:

$$P = \frac{1}{4} + \frac{\arcsin \rho}{2\pi}$$

La fonction $\phi(\rho) \equiv \frac{\arcsin \rho}{2\pi}$ est représentée ci-dessous:

Dans la cas de l'appendice 3, $\rho = \frac{1}{2}$ et la table 2 de Gupta donne $P = 0.3333$. Dans le cas de l'appendice 5, $\rho = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0.288\,68 \simeq 0.3$. Avec la table de Gupta, pour $\rho = 0.3$, on trouve $P = 0.29849$! Dans le cas de l'appendice 4, $\rho = \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.353\,55 \simeq 0.35$. Avec la table de Gupta, on trouve $P = 0.30409$ pour $\rho = 0.3333333$ et $P = 0.3118$ pour $\rho = 0.375$. On retrouve donc à la limite les valeurs calculées dans les appendices 3, 4 et 5.

5.8 Appendice 8 : Le Cas d'Edelman

Edelman s'interesse au cas où il n'y a qu'un seul département c'est-à-dire $K = 1$ et où il n'y a qu'une seule classe d'électeurs c'est-à-dire $\mu = 1$. Sa motivation est bien sûr différente de la nôtre. Il s'intéresse à un parlement dont une partie (A dans nos notations) des membres est élue sur une base uninominale à l'échelle d'un district (comme dans le cas de nos arrondissements) et la partie résiduelle (D dans nos notations) est élue par l'ensemble des électeurs. Il faut donc aussi remplacer la fraction $\frac{1}{4}$ par la fraction 1. Remarquons d'emblée que les calculs de la section précédente s'ajustent sans difficultés. On notera ici r (au lieu de $4r + 1$) le nombre d'électeurs par arrondissement. Le vecteur gaussien $N(\mu, \Omega)$ est:

$$\mu = \left(\frac{r}{2}, \frac{r}{2}, ..., \frac{r}{2}, \frac{Ar}{2}\right)$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{r}}{2} & 0 & 0 & . & 0 & \frac{\sqrt{r}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{r}}{2} & 0 & . & 0 & \frac{\sqrt{r}}{2} \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & . & \frac{\sqrt{r}}{2} & \frac{\sqrt{r}}{2} \\ \frac{\sqrt{r}}{2} & \frac{\sqrt{r}}{2} & . & . & \frac{\sqrt{r}}{2} & \frac{\sqrt{Ar}}{2} \end{pmatrix}$$

ou sous forme normalisée:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & . & 0 & \rho \\ 0 & 1 & 0 & . & 0 & \rho \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & 0 & . & 1 & \rho \\ \rho & \rho & . & . & \rho & 1 \end{pmatrix}$$

avec:

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

5.9 Appendice 9 : Le Pouvoir de Shapley-Shubik dans un Parlement avec Deux Classes de Députés

On considère un parlement composé de deux types de députés. Les premiers (appelés petits députés) sont au nombre de KA (où K et A sont des nombres entiers) et ont un poids égal à 1. Les seconds (appelés grands députés) sont au nombre de K et ont un poids égal à D (où D est un nombre entier). On suppose que les entiers K et $A + D$ sont impairs. Cette hypothèse implique que le jeu majoritaire pondéré $\mathcal{W}$ décrivant ce parlement est fort. Le quota q vaut exactement :

$$\frac{K(A + D) + 1}{2}$$

Considérons un petit député. Il est pivot lorsque la coalition des députés votant à gauche (ou par symétrie à droite car $\mathcal{W}$ est fort) a un poids égal à $\frac{K(A+D)-1}{2}$. Dénombrer les permutations où un petit électeur fixé est pivot est fondamentalement équivalent à dénombrer les combinaisons de petits et grands députés dont le poids total vaut $\frac{K(A+D)-1}{2}$ (fondamentalement, car tous les réarrangements de ces combinaisons doivent bien entendu être comptabilisés).

Dans le cas où $K = 1$, c'est-à-dire dans le contexte parlementaire retenu par Edelman (2004), on obtient que le pouvoir de Shapley-Shubik $\underline{SS}$ d'un petit député est égal à :

$$\underline{SS}\,(A,D) = 2\frac{(A-1)!}{(q-1)!\,(A-q)!}\frac{[(q-1)!]\,[(A+1-q)!]}{(A+1)!}$$

et donc :

$$\overline{SS}(A,D) = 1 - A\underline{SS}$$

A titre d'illustration, on obtient par exemple :

$$\overline{SS}(A,D) = \begin{cases} 0.454\,55 \text{ quand } (A,D) = (10,5) \\ 0.234\,57 \text{ quand } (A,D) = (80,19) \\ 0.248\,44 \text{ quand } (A,D) = (800,199) \\ 0.249\,84 \text{ quand } (A,D) = (8000,1999) \end{cases}$$

Le rapport $\frac{D}{A+D}$ passe de 33% dans le cas du premier calcul à 20% pour les trois derniers calculs. On suspecte une convergence vers 25% qui est confirmée par le calcul. On remarque que :

$$A\left[2\frac{(A-1)!}{(q-1)!\,(A-q)!}\frac{[(q-1)!]\,[(A+1-q)!]}{(A+1)!}\right] = 2\frac{(A+1-q)}{A+1}$$

Supposons que $A = \alpha N$ où $N \equiv A + D$ avec $\alpha > \frac{1}{2}$. On obtient que la part agrégée $A\overline{SS}$ des petits vaut

$$2\frac{(A+1-q)}{A+1} \simeq \frac{2\alpha - 1}{\alpha} \equiv \phi\,(\alpha) \text{ lorsque } N \text{ est grand}$$

A titre d'illustration :

$$\phi\,(\alpha) = \begin{cases} 0.333\,33 \text{ pour } \alpha = 0.6 \\ 0.571\,43 \text{ pour } \alpha = 0.7 \\ 0.75000 \text{ pour } \alpha = 0.8 \\ 0.888\,89 \text{ pour } \alpha = 0.9 \end{cases}$$

Le fossé entre $\phi\,(\alpha)$ et α est non négligeable lorsque α est proche de $\frac{1}{2}$ et tend vers 0 lorsque α tend vers 1. Dans le cas de Banzhaf, les pouvoirs des petits et grands députés sont respectivement[34]:

$$\underline{B}(A,D) = \frac{\binom{A-1}{q-1}}{2^{A-1}} = \frac{\frac{(A-1)!}{((q-1)!)((A-q)!)}}{2^{A-1}}$$

$$\overline{B}(A,D) = \frac{\sum_{i=q-(N-A)}^{q-1}\binom{A}{i}}{2^{A}} = \frac{\sum_{i=q-(N-A)}^{q-1}\frac{A!}{(i!)((A-i)!)}}{2^{A}}$$

[34]Ces deux formules apparaissent aussi dans Edelman (2004).

A titre d'illustration numérique :

$$\overline{B}(A,D) = \begin{cases} 0.974\,35 \text{ quand } (A,D) = (80,19) \\ 0.890\,63 \text{ quand } (A,D) = (10,5) \\ 0.656\,25 \text{ quand } (A,D) = (10,3) \\ 0.451\,17 \text{ quand } (A,D) = (11,2) \end{cases}$$

et

$$\underline{B}(A,D) = \begin{cases} 9.\,172\,8 \times 10^{-3} \text{ quand } (A,D) = (80,19) \\ 7.\,031\,3 \times 10^{-2} \text{ quand } (A,D) = (10,5) \\ 0.164\,06 \text{ quand } (A,D) = (10,3) \\ 0.205\,08 \text{ quand } (A,D) = (11,2) \end{cases}$$

On constate que le ratio$\frac{\overline{B}(A,D)}{\underline{B}(A,D)}$ prend successivement les valeurs $106.22, 12.667$, 4 et 2.2 alors que les ratios des poids prend les valeurs $20, 5, 3$ et 2. On est loin de la formule d'approximation de Penrose ! On notera que le théorème de la limite centrale ne s'applique pas ici car la variance de la variable aléatoire attachée au grand député occupe toujours une part non négligeable de la variance totale.

References

[1] Banzhaf, J.F. (1965) "Weighted voting does not work : a mathematical analysis", *Rutgers Law Review*, 19, 317-343.

[2] Banzhaf, J.F. (1966) "Multi-member electoral districts : do they violate the one man, one vote principle", *Yale Law Journal*, 75, 1309-1338.

[3] Banzhaf, J.F. (1968) "One man, 3.312 votes : a mathematical analysis of the electoral college", *Villanova Law Review*, 13, 304-332.

[4] Berger, J. (1903) *Etude sur la Législation Electorale de 1820*, Thèse pour le Doctorat, Arthur Rousseau, Paris.

[5] Borth, D.M. (1973) "A modification of Owen's method for computing the bi-variate normal integral", *Applied Statistics*, 22, 82-85.

[6] Campbell, P. (1958) *French electoral system and elections since 1789*, Faber and Faber Ltd, London.

[7] Challeton, F. (1891) *Cent ans d'élections. Histoire électorale et parlementaire de la France de 1789 à 1830*, Sauvaire, Paris.

[8] Chang, P.L., Chua, V.C.H. and M. Machover (2006) “L.S. Penrose's Limit Theorem: tests by Simulation”, *Mathematical Social Sciences*, 51, 90-106.

[9] Daley, D.J. (1974) ”Computation of bi- and tri-variate normal integrals”, *Applied Statistics*, 23, 435-438.

[10] Davis, B. and McDonald, D. (1995) ”An Elementary Proof of the Local Central Limit Theorem”, *Journal of Theoretical Probability*, 8, .

[11] De Bertier de Sauvigny, G. (1993) *La Restauration*, Flammarion, Paris.

[12] De Waresquiel, E. et B. Yvert (2002) *Histoire de la Restauration 1814-1830*, Perrin, Paris.

[13] Divgi, D.R. (1979) ”Calculation of Univariate and Bivariate Normal Probability Functions”, *Annals of Statistics*, 7, 903-910.

[14] Edelman, P.H. (2004). “Voting Power and At-Large Representation”, *Mathematical Social Sciences*, 47, 219-232.

[15] Felsenthal, D.S. and M. Machover. (1998) *The measurement of voting power*, Edward Elgar, Cheltenham.

[16] Felsenthal, D.S. and M. Machover (2001) “The Treaty of Nice and Qualified Majority Voting”, *Social Choice and Welfare*, 18, 431-464.

[17] Felsenthal, D.S. and M. Machover (2004) “Analysis of QM Rules in the Draft Constitution for Europe Proposed by the European Convention, 2003”, *Social Choice and Welfare*, 23, 1-20.

[18] Gaudillère, B. (1995) *Atlas Historique des Circonscriptions Electorales Françaises*, Librairie Droz, Genève.

[19] Gupta, S.S. (1963a) ”Probability Integrals of Multivariate Normal and Multivariate T1”, *Annals of Mathematical Statistics*, 34, 792-828.

[20] Gupta, S.S. (1963b) ”Bibliography on the Multivariate Normal Integrals and Related Topics, *Annals of Mathematical Statistics*, 34, 829-838.

[21] Kaniovski, S. (2006) “The Exact Biais of the Banhzaf's Measure of Power when Votes are Not Equiprobable and Independent”, Austrian Institute of Economic Research, Mimeo.

[22] Le Breton, M., Lepelley, D. and H. Smaoui (2011) "The Probability of Casting a Decisive Vote: From IC to IAC through Ehrhart's Polynomials and Strong Mixing", Mimeo.

[23] Lindner, I. and M. Machover (2004) "L.S. Penrose's Limit Theorem: Proof of Some Special Cases", *Mathematical Social Sciences*, 47, 37-49.

[24] Lindner, I. and G. Owen (2007) "Cases Where the Penrose Limit Theorem does not Hold", *Mathematical Social Sciences*, 53, 232-238.

[25] Mann, I. and L.S. Shapley (1964) "The A priori Strength of the Electoral College", in *Game Theory and Related Approaches to Social Behavior*, M. Shubik (Ed), Wiley, New-York, 151-164.

[26] McDonald, D. (1979) "On local limit theorems for integer valued random variables". *Theory of Probability. and Its Applications.*, 24, 613-619.

[27] Miller, N. (2008) "Voting Power with District Plus At-Large Representation", Presented at the 2008 Annual Meeting of the Public Choice Society, San Antonio, Texas.

[28] Mukhin, A. B. (1991) "Local limit theorems for lattice random variables", *Theory of Probability and its Applications*, 35, 698-713.

[29] Newman, E. (1974) "The Blouse and the Frock Coat: the Alliance of the Common People of Paris with the Liberal Leadership and the Middle Class During the Last Years of the Bourbon Restoration", *Journal of Modern History,* 46, 26-59.

[30] Owen, D.B. (1956) "Tables for computing bi-variate normal probabilities", *Annals of Mathematical Statistics*, 27, 1075-1090.

[31] Owen, G. (1972) "Multilinear extensions of games", *Management Science*, 18, 64-79.

[32] Owen, G. (1975) "Evaluation of a Presidential Election Game", *American Political Science Review*, 69, 947-953.

[33] Owen, G. (2001) *Game Theory*, Third Edition, Academic Press, New York.

[34] Penrose, L.S. (1946) "The Elementary Statistics of Majority Voting", *Journal of the Royal Statistical Society*, 109, 53-57.

[35] Penrose, L.S. (1952) *On the Objective Study of Crowd Behaviour*, H.K Lewis and Co, London.

[36] Petrov, V.V. (1975) *Sums of Independent Random Variables*, Springer-Verlag, Heidelberg.

[37] Plackett, R.L. (1965) "A Class of Bivariate Distributions", *Journal of the American Statistical Association*, 60, 516-522.

[38] Rémond, R. (1965) *La Vie Politique en France depuis 1789 : Tome 1 (1789-1848)*, Armand Colin, Paris.

[39] Riker, W.H. and L.S. Shapley (1968) "Weighted Voting: A Mathematical Analysis for Instrumental Judgments", in *Representation: Nomos X*, J.R. Pennock and J.W. Chapman (Eds), Atherton, New-York, 199-216.

[40] Rosenvallon, P. (1992) *Le Sacre du Citoyen: Histoire du Suffrage Universel en France*, Gallimard, Paris.

[41] Shapley, L.S. and M. Shubik (1954) "A method for evaluating the distribution of power in a committee system", *American Political Science Review*, 48, 787-792.

[42] Skuy, D. (2003) *Assasination, Politics and Miracles: France and the Royalist Reaction of 1820*, McGill-Queen University Press, Montréal.

[43] Spitzer, A. (1983) "Restoration Political Theory and the Debate over the Law of the Double Vote", *Journal of Modern History,*

[44] Straffin P.D. (1988) "The Shapley-Shubik and Banzhaf Power Indices as Probabilities", in A.E. Roth (eds.) *The Shapley Value : Essays in Honor of Lloyd S. Shapley*, Cambridge University Press.

[45] Taylor, A.D. and W.S. Zwicker (1999) *Simple Games*, Princeton University Press.

[46] Verjus, A (1996) "Les Femmes dans les Lois Electorales de la Restauration (1817 et 1820)" in *La Démocratie à la Française ou les Femmes Indésirables (1793-1993)*, E. Viennot (Ed), Paris, Publications de l'Université Paris VII-Denis Diderot, Collection des Cahiers du CEDREF.

[47] Verjus, A (2000) "Femmes et Famille dans l'Elaboration des Droits Electoraux de 1789 à la IIIème République" in *Les Droits de L'Homme et le Suffrage Universel*, G. Chianéa et J.L. Chabot (Eds),Paris, L'Harmattan

[48] Verjus, A (2002) “La Veuve et son Gendre dans la Stratégie Electoraliste Libérale sous la Monarchie Censitaire” in *Suffrage, Citoyenneté et Révolutions 1789-1848*, M. Pertué (Ed), Paris, Société des Etudes Robespierristes, Collection des Etudes Révolutionnaires, n°3, 89-98.

[49] Vidu, L. (2011) ”Calcul par Simulations du Pouvoir des Electeurs dans le Cas de la Loi Electorale du 29 Juin 1820”

[50] Wang, Y.J. (1987) ”The Probability Integrals of Bivariate Normal Distributions: A Contingency Table Approach”, *Biometrika*, 74, 185-190.

[51] Weil, G.D. (1895) *Les élections législatives depuis 1789 : Histoire de la législation et de moeurs*, F. Alcan, Paris.